

Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile  
**Correzione della parte II.C del compito 17dic2014.**

**Es. 1.**

Sia  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la successione definita da

$$x_0 = 8, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + 2}{3}}$$

- (i) calcolare l'estremo inferiore e superiore della successione, specificando se si tratta di massimo e minimo;
- (ii) Calcolare, se esiste,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .

La funzione  $f(x) := \sqrt{\frac{x^2+2}{3}}$  (che definisce la ricorsione) ha le proprietà seguenti:

- (a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è pari;
- (b)  $f$  è strettamente crescente sull'intervallo  $[0, +\infty[$ ;
- (c)  $f(x) \geq f(0) = \sqrt{\frac{2}{3}} > 0$ ;
- (d)  $f(x) > x$  se  $x \in [0, 1)$ ,  $f(1) = 1$  e  $f(x) < x$  per  $x \in (1, +\infty)$ ;
- (e)  $f : (1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$ .

Le proprietà (a), (b), (c) sono di immediata verifica, la proprietà (d) segue da un semplice conto mentre la proprietà (e) è conseguenza della (c):

$$x \in (1, +\infty) \Rightarrow f(x) \in (f(1), +\infty) = (1, +\infty).$$

Sappiamo che  $x_{n+1} = f(x_n)$ ; e visto che  $f : (1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$  e  $x_0 = 8 \in (1, +\infty)$  possiamo facilmente dimostrare per induzione che

$$x_n \in (1, +\infty) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Inoltre dalla proprietà (d) segue che  $x_{n+1} = f(x_n) < x_n$ , cioè  $x_n$  è strettamente decrescente. Ne segue che  $x_n \leq x_0 \forall n \in \mathbb{N}$ , e dunque

$$x_0 = \max\{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \sup\{x_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

D'altronde  $x_n$  **non ha minimo** (perché  $x_n$  è strettamente decrescente) inoltre, posto  $\ell := \inf\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  si ha che  $\ell \leq x_0 = 8$ ,  $\ell \geq 1$  (perché da (1) segue che 1 è un minorante) e  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  (perché una successione monotona decrescente converge al proprio estremo inferiore). Ma, per la continuità della funzione  $f$  il limite  $\ell$  deve essere un punto fisso per  $f$ , cioè

$$f(\ell) = \ell.$$

Per la proprietà (d) l'unico valore positivo che soddisfa questa equazione è  $\ell = 1$ ; pertanto

$$\inf\{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1.$$

**Es. 2.**

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2 + \tan x} - \cos \sqrt{x + \sin x}}{x(\log \sin(5x) - \log(4x))}$$

Sottraendo e sommando 1 al numeratore possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{e^{x^2 + \tan x} - \cos \sqrt{x + \sin x}}{x(\log \sin(5x) - \log(4x))} &= \frac{[e^{x^2 + \tan x} - 1] + [1 - \cos \sqrt{x + \sin x}]}{x(\log \sin(5x) - \log(4x))} \\ &= \frac{f(x)}{h(x)} + \frac{g(x)}{h(x)} \end{aligned}$$

dove

$$f(x) := e^{x^2 + \tan x} - 1, \quad g(x) := 1 - \cos \sqrt{x + \sin x}, \quad h(x) := x(\log \sin(5x) - \log(4x)).$$

Osserviamo ora che per  $x \rightarrow 0^+$  si ha che

$$f(x) = e^{x^2 + \tan x} - 1 \sim x^2 + \tan x \sim x,$$

$$g(x) = 1 - \cos \sqrt{x + \sin x} \sim \frac{(\sqrt{x + \sin x})^2}{2} \sim \frac{x + \sin x}{2} \sim x$$

D'altra parte per  $x \rightarrow 0^+$  si ha anche

$$h(x) = x(\log \sin(5x) - \log(4x)) = x \log \frac{\sin(5x)}{(4x)} \sim x \log \frac{5}{4}$$

Per il principio di sostituzione

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x \log \frac{5}{4}} = \frac{1}{\log \frac{5}{4}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x \log \frac{5}{4}} = \frac{1}{2 \log \frac{5}{4}}$$

Quindi, per il teorema del limite della somma, il limite di partenza vale  $\frac{2}{\log \frac{5}{4}}$ .

**Es. 3.**

Si consideri la successione

$$x_n := \left( \frac{n+3}{n-3} \right)^{n^2}$$

(i) Calcolare  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .

(ii) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} x_n$$

(i) Possiamo riscrivere la quantità tra parentesi nel modo seguente

$$\frac{n+3}{n-3} = 1 + \frac{6}{n-3} = 1 + \frac{1}{n} \frac{6n}{n-3}.$$

Posto  $a_n := \frac{6n}{n-3}$  riscriviamo  $x_n$  nella maniera seguente

$$x_n := \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} a_n \right)^n \right]^n$$

Ricordiamo che, se  $a_n \rightarrow a^* \in \mathbb{R}$  allora  $(1 + \frac{1}{n} a_n)^n \rightarrow e^{a^*}$ . Usando questo principio possiamo concludere che la quantità all'interno delle parentesi quadre converge ad  $\exp(6) > 2^6 = 64$  e, di conseguenza, sarà definitivamente più grande di 64. Quindi esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che

$$x_n \geq (64)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui  $x_n \rightarrow +\infty$ .

(ii) Procedendo come al punto precedente scriviamo

$$2^{-n} x_n := \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} a_n \right)^n \right]^n \quad (2)$$

In questo caso la quantità tra parentesi quadre in (2) converge a  $\frac{e^6}{2} > 32$ ; pertanto essa sarà definitivamente maggiore di 32 e di conseguenza

$$2^{-n} x_n \leq 32^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} x_n = +\infty$ .