

Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Correzione della parte II.B del compitino 17dic2014.

Es. 1.

Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione definita da

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2}{4} + 2}$$

- (i) calcolare l'estremo inferiore e superiore della successione, specificando se si tratta di massimo e minimo;
- (ii) Calcolare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

La funzione $f(x) := \sqrt{\frac{x^2}{4} + 2}$ (che definisce la ricorsione) ha le proprietà seguenti:

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è pari;
- (b) f è strettamente crescente sull'intervallo $[0, +\infty[$;
- (c) $f(x) \geq f(0) = \sqrt{2} > 0$;
- (d) posto $c := \sqrt{8/3}$ si ha che $f(x) > x$ se $x \in [0, c)$, $f(c) = c$ e $f(x) < x$ per $x \in (c, +\infty)$;
- (e) $f : [0, c) \rightarrow [f(0), c) \subset [0, c)$.

Le proprietà (a), (b), (c) sono di immediata verifica, la proprietà (d) segue da un semplice conto mentre la proprietà (e) è conseguenza della (c):

$$x \in [0, c) \Rightarrow f(x) \in [f(0), f(c)) = [f(0), c).$$

Sappiamo che $x_{n+1} = f(x_n)$; e visto che $f : [0, c) \rightarrow [0, c)$ e $x_0 = 0 \in [0, c)$ possiamo facilmente dimostrare per induzione che

$$x_n \in [0, c) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Inoltre dalla proprietà (d) segue che $x_{n+1} = f(x_n) > x_n$, cioè x_n è strettamente crescente. Ne segue che $x_n \geq x_0 \forall n \in \mathbb{N}$, e dunque

$$x_0 = \min\{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \inf\{x_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

D'altronde x_n non ha massimo (perché x_n è strettamente crescente) inoltre, posto $\ell := \sup\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ si ha che $\ell \geq x_1 > 0$, $\ell \leq 1$ (perché da (1) segue che c è un maggiorante) e $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ (perché una successione monotona crescente converge al proprio estremo superiore). Ma, per la continuità della funzione f il limite ℓ deve essere un punto fisso per f , cioè

$$f(\ell) = \ell.$$

Per la proprietà (d) l'unico valore positivo che soddisfa questa equazione è $\ell = c$; pertanto

$$\sup\{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{8/3}.$$

Es. 2.

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin x^2 + \tan x} - \cos \sqrt{x + x^2}}{x(\log \sin(3x) - \log(4x))}$$

Sottraendo e sommando 1 al numeratore possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{e^{\sin x^2 + \tan x} - \cos \sqrt{x + x^2}}{x(\log \sin(3x) - \log(4x))} &= \frac{[e^{\sin x^2 + \tan x} - 1] + [1 - \cos \sqrt{x + x^2}]}{x(\log \sin(3x) - \log(4x))} \\ &= \frac{f(x)}{h(x)} + \frac{g(x)}{h(x)} \end{aligned}$$

dove

$$f(x) := e^{\sin x^2 + \tan x} - 1, \quad g(x) := 1 - \cos \sqrt{x + x^2}, \quad h(x) := x(\log \sin(3x) - \log(4x)).$$

Osserviamo ora che per $x \rightarrow 0^+$ si ha che

$$f(x) = e^{\sin x^2 + \tan x} - 1 \sim \sin x^2 + \tan x \sim x,$$

$$g(x) = 1 - \cos \sqrt{x + x^2} \sim \frac{(\sqrt{x + x^2})^2}{2} \sim \frac{x}{2}$$

D'altra parte per $x \rightarrow 0^+$ si ha anche

$$h(x) = x(\log \sin(3x) - \log(4x)) = x \log \frac{\sin(3x)}{(4x)} \sim x \log \frac{3}{4}$$

Per il principio di sostituzione

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x \log \frac{3}{4}} = \frac{1}{\log \frac{3}{4}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x/2}{x \log \frac{3}{4}} = \frac{1}{2 \log \frac{3}{4}}$$

Quindi, per il teorema del limite della somma, il limite di partenza vale $\frac{3}{2 \log \frac{3}{4}}$.

Es. 3.

Si consideri la successione

$$x_n := \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n^2}$$

(i) Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

(ii) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n x_n$$

(i) Possiamo riscrivere la quantità tra parentesi nel modo seguente

$$\frac{2n-1}{2n+1} = 1 - \frac{2}{2n+1} = 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{-2n}{2n+1}.$$

Posto $a_n := \frac{-2n}{2n+1}$ riscriviamo x_n nella maniera seguente

$$x_n := \left[\left(1 + \frac{1}{n} a_n \right)^n \right]^n$$

Ricordiamo che, se $a_n \rightarrow a^* \in \mathbb{R}$ allora $(1 + \frac{1}{n} a_n)^n \rightarrow e^{a^*}$; pertanto usando questo principio possiamo concludere che la quantità all'interno delle parentesi quadre converge ad $\exp(-1) < 1/2$ e sarà pertanto definitivamente più piccola di $1/2$; pertanto esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$x_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e dunque $x_n \rightarrow 0$.

(ii) Procedendo come al punto precedente scriviamo

$$3^n x_n := \left[3 \left(1 + \frac{1}{n} a_n \right)^n \right]^n \quad (2)$$

In questo caso la quantità tra parentesi quadre converge a $\frac{3}{e} > 9/8$ (si ricordi che $e < 8/3$). Possiamo quindi concludere che la quantità che compare in (2) tra parentesi quadre ten sarà definitivamente maggiore di $9/8$ e di conseguenza

$$3^n x_n \geq (9/8)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

da cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n x_n = +\infty$.