Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Correzione della parte II.A del compitino 17dic2014.

Es. 1.
Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita da

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2+2}{3}}$$

.

(i) calcolare l'estremo inferiore e superiore della successione, specificando se si tratta di massimo e minimo;

(ii) Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

La funzione $f(x) := \sqrt{\frac{x^2+2}{3}}$ (che definisce la ricorsione) ha le proprietà seguenti:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è pari;

(b) f è strettamente crescente sull'intervallo $[0, +\infty[$;

(c) $f(x) \geq f(0) = \sqrt{\frac{2}{3}} > 0$;

(d) $f(x) > x$ se $x \in [0, 1)$, $f(1) = 1$ e $f(x) < x$ per $x \in]1, +\infty[$;

(e) $f : [0, 1[\to [f(0), 1[\subset [0, 1[$.

Le proprietà (a), (b), (c) sono di immediata verifica, la proprietà (d) segue da un semplice conto mentre la proprietà (e) è conseguenza della (c):

$$x \in [0, 1) \;\Rightarrow\; f(x) \in [f(0), f(1)[= [f(0), 1[.$$

Sappiamo che $x_{n+1} = f(x_n)$; e visto che $f : [0, 1[\to [0, 1[$ e $x_0 = 0 \in [0, 1[$ possiamo facilmente dimostrare per induzione che

$$x_n \in [0, 1[\quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Inoltre dalla proprietà (d) segue che $x_{n+1} = f(x_n) > x_n$, cioé x_n è strettamente crescente. Ne segue che $x_n \geq x_0 \forall n \in \mathbb{N}$, e dunque

$$x_0 = \min\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \inf\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

D'altronde x_n non ha massimo (perché x_n è strettamente crescente) inoltre, posto $\ell := \sup\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ si ha che $\ell \geq x_1 > 0$, $\ell \leq 1$ (perché da (1) segue che 1 è un maggiorante) e $\ell = \lim_{n\to+\infty} x_n$ (perché una successione monotona crescente converge al proprio estremo superiore). Ma, per la continuità della funzione f il limite ℓ deve essere un punto fisso per f, cioé

$$f(\ell) = \ell.$$

Per la proprietà (d) l'unico valore positivo che soddisfa questa equazione è $\ell = 1$; pertanto

$$\sup\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to+\infty} x_n = 1.$$

Es. 2.
Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2+\sin x} - \cos\sqrt{x+\tan x}}{x(\log\sin(4x) - \log(5x))}$$

Sottraendo e sommando 1 al numeratore possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{e^{x^2+\sin x} - \cos\sqrt{x+\tan x}}{x(\log\sin(4x) - \log(5x))} &= \frac{[e^{x^2+\sin x} - 1] + [1 - \cos\sqrt{x+\tan x}]}{x(\log\sin(4x) - \log(5x))} \\ &= \frac{f(x)}{h(x)} + \frac{g(x)}{h(x)} \end{aligned}$$

dove

$$f(x) := e^{x^2+\sin x} - 1, \quad g(x) := 1 - \cos\sqrt{x+\tan x}, \quad h(x) := x(\log\sin(4x) - \log(5x)).$$

Osserviamo ora che per $x \to 0^+$ si ha che

$$f(x) = e^{x^2+\sin x} - 1 \sim x^2 + \sin x \sim x,$$

$$g(x) = 1 - \cos\sqrt{x+\tan x} \sim \frac{(\sqrt{x+\tan x})^2}{2} \sim \frac{x+\tan x}{2} \sim x$$

D'altra parte per $x \to 0^+$ si ha anche

$$h(x) = x(\log\sin(4x) - \log(5x)) = x\log\frac{\sin(4x)}{(5x)} \sim x\log\frac{4}{5}$$

Per il principio di sostituzione

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x\log\frac{4}{5}}=\frac{1}{\log\frac{4}{5}},\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x\log\frac{4}{5}}=\frac{1}{\log\frac{4}{5}}$$

Quindi, per il teorema del limite della somma, il limite di partenza vale $\frac{2}{\log\frac{4}{5}}$.

Es. 3.
Si consideri la successione

$$x_n := \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{n^2}$$

(i) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

(ii) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{-n}x_n.$$

(i) Possiamo riscrivere la quantità tra parentesi nel modo seguente

$$\frac{3n+1}{3n-1}=1+\frac{2}{3n-1}=1+\frac{1}{n}\frac{2n}{3n-1}.$$

Posto $a_n := \frac{2n}{3n-1}$ riscriviamo x_n nella maniera seguente

$$x_n := \left[\left(1+\frac{1}{n}a_n\right)^n\right]^n$$

Ricordiamo che, se $a_n \to a^* \in \mathbb{R}$ allora $(1+\frac{1}{n}a_n)^n \to e^{a^*}$; pertanto usando questo principio possiamo concludere che la quantità all'interno delle parentesi quadre converge ad $\exp(2/3) > 1+2/3$ e sarà pertanto definitivamente più grande di $5/3$; pertanto esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$x_n \geq \left(\frac{5}{3}\right)^n \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

e dunque $x_n \to +\infty$.

(ii) Procedendo come al punto precedente scriviamo

$$2^{-n}x_n := \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}a_n\right)^n\right]^n \tag{2}$$

In questo caso la quantità tra parentesi quadre converge a $\frac{e^{2/3}}{2}$. Utilizzando la formula

$$e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$$

con $n = 4$ otteniamo che $e < 11/4$ e dunque $\frac{e^{2/3}}{2} < \ell$ con

$$\ell := \frac{(11/4)^{2/3}}{2} = \sqrt[3]{\frac{121}{128}} < 1.$$

Dato che la quantità che compare in (2) tra parentesi quadre tende a $\frac{e^{2/3}}{2} < \ell$, essa sarà definitivamente minore di ℓ e di conseguenza

$$2^{-n} x_n \leq \ell^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Visto che $2^{-n} x_n \geq 0$ ne segue che $\lim_{n\to+\infty} 2^{-n} x_n = 0$.