Soluzioni [A]

1.

Deve essere 2 senx - 1 ≥ 0, cioè senx ≥ ½.

Nell'intervallo [0 , 2π] indicato la condizione è verificata per x $\in \left[\frac{\pi}{6} , \frac{5\pi}{6} \right]$.

2.

Poiché $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = i$, siamo ricondotti a calcolare le radici quadrate di i, che sono $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

3.

Per x →0^+ f (x) = $\frac{2\log x+3}{\log x - 2} \approx \frac{2\log x}{\log x} \to 2$.

4.

Poiché per x → 0^+ $\sqrt{1-\cos 2x} \approx \sqrt{\frac{4x^2}{2}} = \sqrt{2}\,x$, il limite da destra vale $\sqrt{2}$.

Il limite da sinistra coincide con f (0) = $\sqrt{2}$ α. Perché la funzione risulti continua nel punto x_0 = 0, deve dunque essere α = 1.

5.

L'argomento del logaritmo tende a 1 e dunque il logaritmo si può approssimare con l'argomento diminuito di 1 (per x →0 log (1 + x) ≈ x ; per x → 1 log x ≈ x – 1). Dunque $f(x) \approx \frac{1-x}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} = -(x+1) \to$ 2.

6.

Dobbiamo esprimere il fatto che -1 è un maggiorante dell'insieme A , e in particolare il più piccolo dei maggioranti (cioè un numero più piccolo di -1 non è un maggiorante). In simboli:

$$(a)\ \ \forall x \in A, x \le -1\ ;\ \ (b)\ \ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} \in A : \bar{x} > -1-\varepsilon .$$

Soluzioni [B]

1.

Deve essere senx ≥ cosx.

Nell'intervallo [0 , 2π] indicato la condizione è verificata per $x \in \left(\frac{\pi}{4} , \frac{5\pi}{4} \right)$.

2.

Poiché $\frac{1+i}{i-1} = \frac{-(1+i)^2}{(-1+i)(-1-i)} = -i$, siamo ricondotti a calcolare le radici quadrate di -i, che sono $\pm \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$.

3.

Per $x \to 0^+$ $f(x) = \frac{\log x + 3}{3 \log x + 1} \approx \frac{\log x}{3 \log x} \to 1/3$.

4.

Per $x \to 0^+$ $\frac{\text{sen}x \ (3+\sqrt{9+x})}{(3-\sqrt{9+x})(3+\sqrt{9+x})} \approx \frac{6x}{-x} \to -6$.

Il limite da sinistra coincide con $f(0) = 6\sqrt{3}\,\alpha$. Perché la funzione risulti continua nel punto $x_0 = 0$, deve dunque essere $\alpha = -1/\sqrt{3}$.

5.

Poniamo $x - ½ = t \to 0$: $f(x) = \frac{1 - \text{sen}(\pi/2 + \pi t)}{2t} = \frac{1 - \cos \pi t}{2t} \approx \frac{\pi^2 t^2 / 2}{2t} \to 0$.

6.

Dobbiamo esprimere il fatto che l'insieme A non è limitato inferiormente , cioè non è dotato di minoranti. In simboli, $\forall M \in R, \exists \bar{x} \in A : \bar{x} < M$.

Soluzioni [C]

1.

Deve essere $1 - 2\cos x \geq 0$, cioè $\cos x \leq ½$.

Nell'intervallo $[0, 2\pi]$ indicato la condizione è verificata per $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

2.

Poiché $\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i$, siamo ricondotti a calcolare le radici quadrate di -i, cioè $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$.

3.

Per $x \to 0^+$ $f(x) = \frac{\log x - 3}{(\log x)/2 - 2} \approx \frac{\log x}{(\log x)/2} \to 2$.

4.

Poiché per $x \to 0^+$ $\operatorname{sen} 3x \approx 3x$, $\log(1 - x^2) \approx -x^2$, il limite da destra vale -3.

Il limite da sinistra coincide con $f(0) = 2\alpha$. Perché la funzione risulti continua nel punto $x_0 = 0$, deve dunque essere $\alpha = -3/2$.

5.

L'argomento del logaritmo tende a 1 e dunque il logaritmo si può approssimare con l'argomento diminuito di 1 (per $x \to 0$ $\log(1 + x) \approx x$; per $x \to 1$ $\log x \approx x - 1$). Dunque $f(x) \approx \frac{x-2}{\left(\frac{x-2}{x+2}\right)} = x + 2 \to 4$.

6.

Dobbiamo esprimere il fatto che -5 è un maggiorante dell'insieme A , e in particolare il più piccolo dei maggioranti (cioè un numero più piccolo di -5 non è un maggiorante). In simboli:

(a) $\forall x \in A, x \leq -5$; (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} \in A : \bar{x} > -5 - \varepsilon$.

Soluzioni [D]

1.

Deve essere senx ≠ cosx.

Nell'intervallo [0 , 2π] indicato la condizione è verificata per x $\notin \left\{ \frac{\pi}{4} , \frac{5\pi}{4} \right\}$.

2.

Poiché $\frac{-1+i}{1+i} = \frac{-(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = i$, siamo ricondotti a calcolare le radici quadrate di i, che sono $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

3.

Per x →0^+ f (x) = $\frac{3\log x + 2}{\log x - 3} \approx \frac{3\log x}{\log x} \to 3$.

4.

Per x → 0^+ $e^{2x} = 1 + 2x + o(x)$, $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$, sen x = o (x) ; f (x) $\frac{2x}{x} \to 2$.

Il limite da sinistra coincide con f (0) = 3$\sqrt{2}$ α. Perché la funzione risulti continua nel punto x_0 = 0, deve dunque essere α = $\sqrt{2}$ / 3.

5.

Poniamo x – 1 = t → 0 : $f(x) = \frac{\cos(\pi/2 + \pi t/2)}{t} = \frac{-\operatorname{sen}(\pi t/2)}{t} \approx \frac{-\pi t/2}{t}$ → - π/2.

6.

Dobbiamo esprimere il fatto che l'insieme A non è limitato superiormente , cioè non è dotato di maggioranti. In simboli, $\forall M \in R , \exists \overline{x} \in A : \overline{x} > M$.