Soluzioni [A]

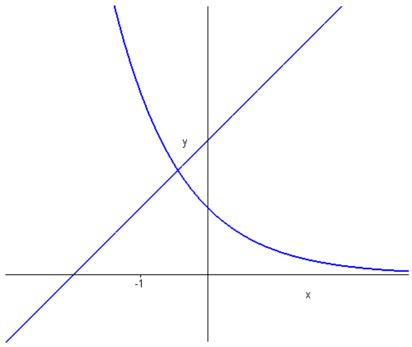
1.

C.E. R

SGN positiva in $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$; negativa in $(-\infty, -1)$; nulla in -1 e in 0

LIM per $x \to +\infty$ $f(x) \approx x e^x \to +\infty$ senza asintoto

per $x \to -\infty$ $f(x) \approx x + 1 \to -\infty$ con asintoto



DRV $f'(x) = \operatorname{sgn}(e^x - 1)\ ((2 + x) e^x - 1)$

Il segno del secondo fattore si ricava per via grafica:

$((2 + x) e^x - 1) > 0 \leftrightarrow 2 + x > e^{-x} \leftrightarrow x > \alpha$ con $\alpha \in (-1, 0)$

Tenendo conto anche del segno del primo fattore (positivo per $x > 0$), si ottiene:

$f'(x) > 0$ per $x < \alpha$ e per $x > 0$.

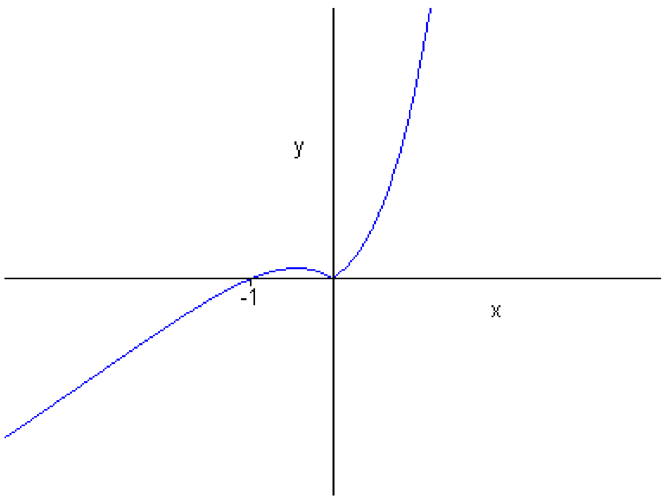
$x = 0$ è un punto angoloso: $f'(0^{\pm}) = \pm 1$

DRV^2 $f''(x) = \operatorname{sgn}(e^x - 1)(x + 3) e^x$

$f''(x) > 0$ per $x < -3$ e per $x > 0$

punti di flesso: $x=-3$, $x = 0$

GRAFICO



2.

Il polinomio caratteristico $k^2 + 4$ ha le radici $\pm 2i$; l'integrale dell'equazione omogenea è dunque dato da :

$y_0(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x.$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione completa, passiamo provvisoriamente in campo complesso, riscrivendo l'equazione nella forma z" + 4 z = x $e^{i\,x}$. Poiché i non è radice del polinomio, cerchiamo una soluzione particolare complessa nella forma z = (A x + B) $e^{i\,x}$. Sostituendo nell'equazione, si trova che deve essere A = 1/3 , B = - 2 i / 9. Dunque, z = (x/3 – 2 i / 9) (cos x + i sen x). La parte reale di questa funzione , cioè y = x cosx / 3 + 2 senx / 9, è una soluzione particolare reale dell'equazione di partenza.

3.

Poiché l'argomento del logaritmo tende a 1, il logaritmo può essere approssimato con l'argomento diminuito di 1. Si ha dunque:

$$|a_n| \approx |x|^n \frac{n-2}{n^2+2} \approx \frac{|x|^n}{n}.$$

Applicando il criterio della radice o quello del rapporto, si ottiene che la serie converge se | x | < 1 , non converge se | x | > 1. Esaminiamo separatamente i due casi rimasti.

Se x = 1, $a_n \approx \frac{1}{n}$ e la serie diverge.

Se x = -1 si ottiene una serie a segno alterno che converge per il teorema di Leibniz, poiché il logaritmo tende a zero decrescendo. Che tenda a zero è immediato; che sia decrescente si può verificare ad esempio considerando la funzione di variabile reale log [$(x^2 + x) / (x^2 + 2)$] e facendo vedere che la sua derivata è negativa in un intorno di +∞. Questo è vero perché f' (x) = $(4x - 2x^2)/(x^2+x)(x^2+2)$ e per x →+∞ è f' (x) ≈ - 2 / x^2 .

Soluzioni [B]

1.

C.E. R

SGN positiva in (1 , +∞) ; negativa in (-∞ , 0) ∪ (0 , 1) ; nulla in 0 e in 1

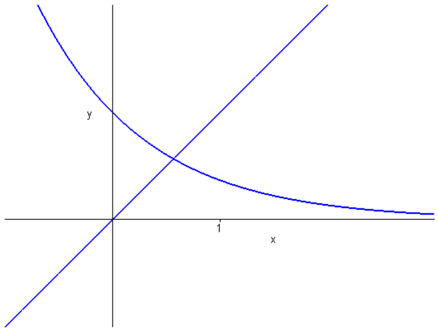
LIM per $x \to +\infty$ $f(x) \approx x e^x \to +\infty$ senza asintoto

per $x \to -\infty$ $f(x) \approx x - 1 \to -\infty$ con asintoto

DRV $f'(x) = \text{sgn}(e^x - 1)(x e^x - 1)$

Il segno del secondo fattore si ricava per via grafica:

$x e^x - 1 > 0 \leftrightarrow x > e^{-x} \leftrightarrow x > \alpha$ con $\alpha \in (-1, 0)$



Tenendo conto anche del segno del primo fattore (positivo per $x > 0$), si ottiene:

$f'(x) > 0$ per $x < 0$ e per $x > \alpha$.

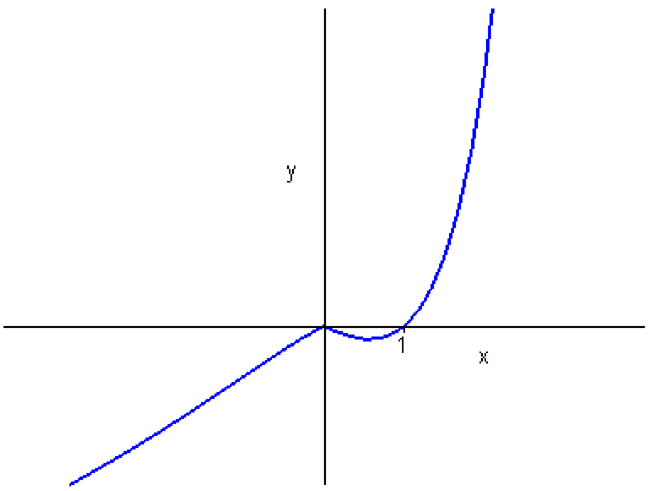
$x = 0$ è un punto angoloso: $f'(0^{\pm}) = \mp 1$

DRV^2 $f''(x) = \text{sgn}(e^x - 1)(x + 1) e^x$

$f''(x) > 0$ per $x < -1$ e per $x > 0$

punti di flesso: $x = -1$, $x = 0$

GRAFICO



2.

Il polinomio caratteristico $k^2 + 1$ ha le radici $\pm i$; l'integrale dell'equazione omogenea è dunque dato da :

$$y_0 (x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione completa, passiamo provvisoriamente in campo complesso, riscrivendo l'equazione nella forma $z'' + z = x\, e^{2ix}$. Poiché $2i$ non è radice del polinomio, cerchiamo una soluzione particolare complessa nella forma $z = (A x + B)\, e^{2i x}$. Sostituendo nell'equazione, si trova che deve essere $A = -1/3$, $B = - 4 i / 9$. Dunque, $z = (- x/3 – 4 i / 9) (\cos 2 x + i \operatorname{sen} 2 x)$. La parte immaginaria di questa funzione , cioè $y = - x \operatorname{sen} 2x / 3 - 4 \cos 2x / 9$, è una soluzione particolare reale dell'equazione di partenza.

3.

Poiché l'argomento del logaritmo tende a 1, il logaritmo può essere approssimato con l'argomento diminuito di 1. Si ha dunque:

$$| a_n | \approx | x |^n \frac{2n-1}{n^2+2} \approx \frac{2| x |^n}{n} .$$

Applicando il criterio della radice o quello del rapporto, si ottiene che la serie converge se $| x | < 1$, non converge se $| x | > 1$. Esaminiamo separatamente i due casi rimasti.

Se $x = 1$, $a_n \approx \frac{2}{n}$ e la serie diverge.

Se $x = -1$ si ottiene una serie a segno alterno che converge per il teorema di Leibniz, poiché il logaritmo tende a zero decrescendo. Che tenda a zero è immediato; che sia decrescente si può verificare ad esempio considerando la funzione di variabile reale $\log [(x^2 + 2 x) / (x^2 + 1)]$ e facendo vedere che la sua derivata è negativa in un intorno di $+\infty$. Questo è vero perché $f' (x) = (2+2x-2x^2)/(x^2+2x)(x^2+1)$ e per $x \to +\infty$ è $f' (x) \approx - 2 / x^2$.