Soluzioni [A]

1.

C.E. $\begin{cases} 2x^2 - 2x + 1 > 0 \\ \left| \dfrac{x}{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}} \right| \le 1 \end{cases}$ entrambe le disequazioni sono sempre verificate

LIM per $x \to +\infty$ $f(x) = x + \pi/4 + o(1)$; $f(x) \to +\infty$ con asintoto $y = x + \pi/4$

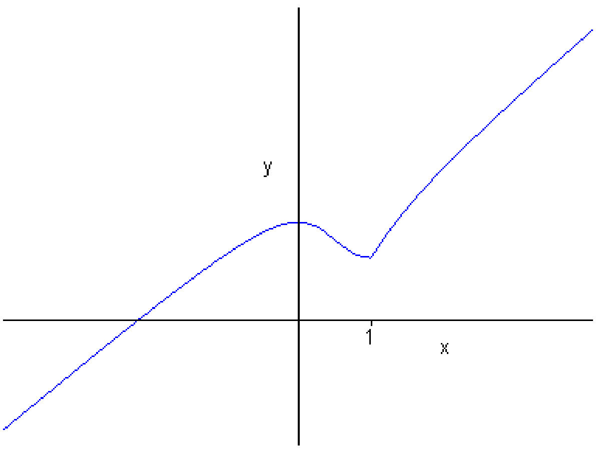
per $x \to -\infty$ $f(x) = x + 3\pi/4 + o(1)$; $f(x) \to -\infty$ con asintoto $y = x + 3\pi/4$

DRV $f'(x) = 1 + \dfrac{\operatorname{sgn}(x-1)}{2x^2 - 2x + 1}$

———————0- - - - - - - -X———————

0 1

$x = 1$ punto angoloso; $f'(1^+) = 2$, $f'(1^-) = 0$



2.

Con le notazioni viste a lezione, $a(x) = -x/(x^2+1) \to A(x) = -\frac{1}{2}\log(x^2+1)$, $e^{A(x)} = 1/\sqrt{x^2+1}$.

$$\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = -\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \to \frac{y}{\sqrt{x^2+1}} = c - 2\sqrt{x^2+1} \to y = c\sqrt{x^2+1} - 2x^2 - 2.$$

3.

$$a_n \approx \frac{2\sqrt{n}\,\log n}{n^2} = \frac{2\log n}{n^{3/2}} < \frac{2n^{\alpha}}{n^{3/2}} = \frac{2}{n^{3/2-\alpha}}$$

Scelto α tale che sia $3/2 - \alpha > 1$, cioè $\alpha < \frac{1}{2}$, il criterio del confronto permette di concludere stabilendo la convergenza della serie.

Soluzioni [B]

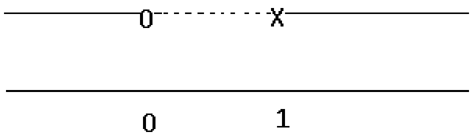
1.

C.E. $\begin{cases} 2x^2+2x+1>0 \\ \left| \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+2x+1}} \right| \le 1 \end{cases}$ entrambe le disequazioni sono sempre verificate

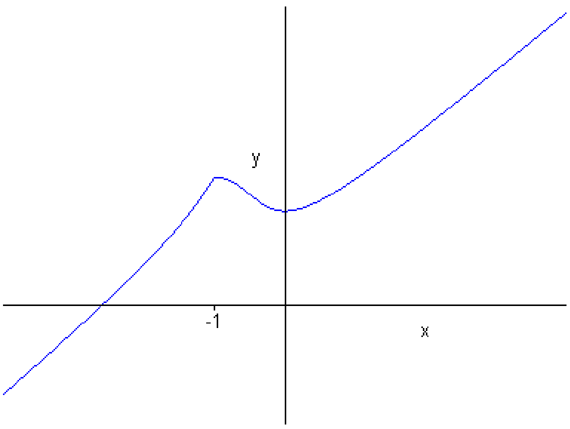
LIM per $x \to +\infty$ $f(x) = x + \pi/4 + o(1)$; $f(x) \to +\infty$ con asintoto $y = x + \pi/4$

per $x \to -\infty$ $f(x) = x + 3\pi/4 + o(1)$; $f(x) \to -\infty$ con asintoto $y = x + 3\pi/4$

DRV $f'(x) = 1 - \dfrac{\operatorname{sgn}(x+1)}{2x^2+2x+1}$



$x = -1$ punto angoloso; $f'(1^+) = 0$, $f'(1^-) = 2$



2.

Con le notazioni viste a lezione, $a(x) = x/(x^2+1) \to A(x) = \frac{1}{2}\log(x^2+1)$, $e^{A(x)} = \sqrt{x^2+1}$.

$$\left(y\sqrt{x^2+1} \right)' = 2x\sqrt{x^2+1} \to y\sqrt{x^2+1} = c + 2/3\sqrt{(x^2+1)^3} \to y = c/\sqrt{x^2+1} + 2/3\,(x^2+1).$$

3.

$$a_n \approx \frac{\sqrt{n}\,\log^2 n}{n^2} = \frac{\log^2 n}{n^{3/2}} < \frac{n^{2\alpha}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{3/2-2\alpha}}$$

Scelto α tale che sia $3/2 - 2\alpha > 1$, cioè $\alpha < 1/4$, il criterio del confronto permette di concludere stabilendo la convergenza della serie.