

Soluzioni [A]

1.

C.E. $\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - 2x + 1 > 0 \\ \left| \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}} \right| \leq 1 \end{array} \right. \text{ entrambe le disequazioni sono sempre verificate}$

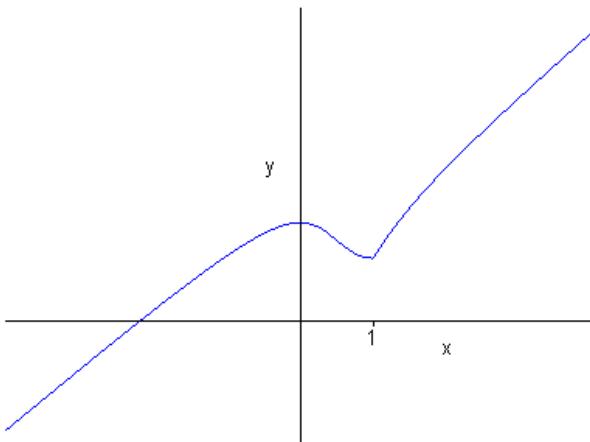
LIM per $x \rightarrow +\infty$ $f(x) = x + \pi/4 + o(1)$; $f(x) \rightarrow +\infty$ con asintoto $y = x + \pi/4$

per $x \rightarrow -\infty$ $f(x) = x + 3\pi/4 + o(1)$; $f(x) \rightarrow -\infty$ con asintoto $y = x + 3\pi/4$

DRV $f'(x) = 1 + \frac{\operatorname{sgn}(x-1)}{2x^2 - 2x + 1}$

The graph shows a horizontal line at $y=1$ for $x < 1$, a sharp corner at $(1, 1)$, and a straight line with slope 2 for $x > 1$. The point $x=1$ is marked as a sharp corner (cusp-like) where the function value is 1 from the left and 2 from the right.

$x = 1$ punto angoloso; $f'(1^+) = 2$, $f'(1^-) = 0$



2.

Con le notazioni viste a lezione, $a(x) = -x / (x^2 + 1) \rightarrow A(x) = -\frac{1}{2} \log(x^2 + 1)$, $e^{A(x)} = 1 / \sqrt{x^2 + 1}$.

$$\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)' = -\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} \rightarrow \frac{y}{\sqrt{x^2 + 1}} = c - 2\sqrt{x^2 + 1} \rightarrow y = c\sqrt{x^2 + 1} - 2x^2 - 2.$$

3.

$$a_n \approx \frac{2\sqrt{n} \log n}{n^2} = \frac{2 \log n}{n^{3/2}} < \frac{2n^\alpha}{n^{3/2}} = \frac{2}{n^{3/2-\alpha}}$$

Scelto α tale che sia $3/2 - \alpha > 1$, cioè $\alpha < 1/2$, il criterio del confronto permette di concludere stabilendo la convergenza della serie.

Soluzioni [B]

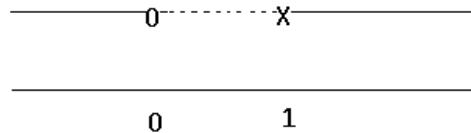
1.

C.E. $\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 + 2x + 1 > 0 \\ \left| \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 2x + 1}} \right| \leq 1 \end{array} \right. \text{ entrambe le disequazioni sono sempre verificate}$

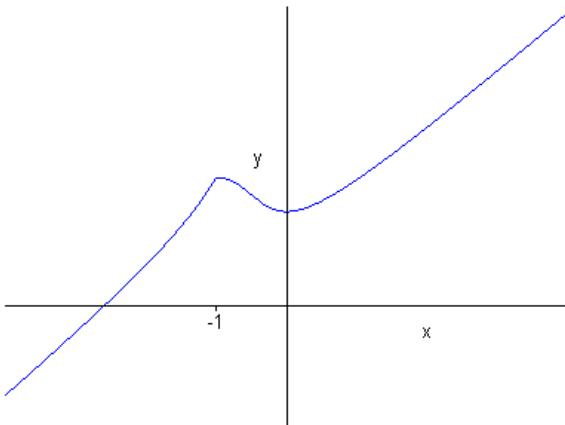
LIM per $x \rightarrow +\infty$ $f(x) = x + \pi/4 + o(1)$; $f(x) \rightarrow +\infty$ con asintoto $y = x + \pi/4$

per $x \rightarrow -\infty$ $f(x) = x + 3\pi/4 + o(1)$; $f(x) \rightarrow -\infty$ con asintoto $y = x + 3\pi/4$

DRV $f'(x) = 1 - \frac{\operatorname{sgn}(x+1)}{2x^2 + 2x + 1}$



$x = -1$ punto angoloso; $f'(1^+) = 0$, $f'(1^-) = 2$



2.

Con le notazioni viste a lezione, $a(x) = x/(x^2 + 1) \rightarrow A(x) = \frac{1}{2} \log(x^2 + 1)$, $e^{A(x)} = \sqrt{x^2 + 1}$.

$$\left(y \sqrt{x^2 + 1} \right)' = 2x \sqrt{x^2 + 1} \rightarrow y \sqrt{x^2 + 1} = c + 2/3 \sqrt{(x^2 + 1)^3} \rightarrow y = c/\sqrt{x^2 + 1} + 2/3(x^2 + 1).$$

3.

$$a_n \approx \frac{\sqrt{n} \log^2 n}{n^2} = \frac{\log^2 n}{n^{3/2}} < \frac{n^{2\alpha}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{3/2 - 2\alpha}}$$

Scelto α tale che sia $3/2 - 2\alpha > 1$, cioè $\alpha < 1/4$, il criterio del confronto permette di concludere stabilendo la convergenza della serie.