Soluzioni [1]

1.

Consideriamo la funzione $f(x) = 1 / x^2 \operatorname{senx}$.

I punti di discontinuità più vicini all'estremo fisso di integrazione sono 0 e π; la funzione non è integrabile nell'intorno di nessuno dei due.

Infatti:

per $x \to 0$ $\quad f(x) \approx 1 / x^3$, che non è integrabile nell'intorno di 0 essendo un infinito di ordine 3

per $x \to \pi$ $\quad f(x) \approx 1 / \pi^2 \operatorname{senx} \approx 1 / \pi^2 (\pi - x)$ (nel secondo passaggio abbiamo utilizzato la formula di Taylor di punto iniziale π), che non è integrabile nell'intorno di π essendo un infinito di ordine 1.

Studiamo adesso la funzione F (x).

C.E. $\quad (0, \pi)$

SGN $\quad$ la funzione f (x) è positiva nell'intervallo; il segno di F (x) dipende dunque solo dall'ordine dei due estremi di integrazione. In particolare, la funzione è positiva per $x > 1$, negativa per $x < 1$, nulla per $x = 1$.

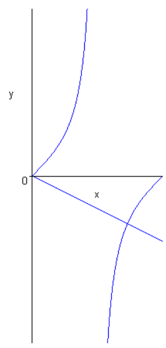
LIM $\quad$ per $x \to 0$ $\quad F(x) \to -\infty$, per $x \to \pi$ $\quad F(x) \to +\infty$

DRV $\quad F'(x) = 1 / x^2 \operatorname{senx}$, sempre positiva nel C.E.

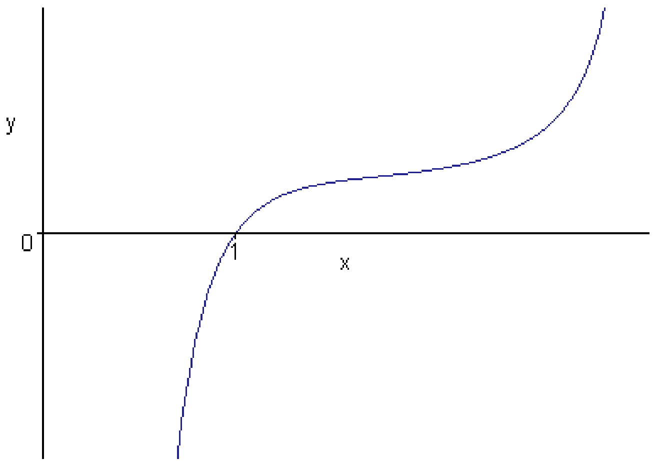
DRV^2 $\quad F''(x) = -\dfrac{2 \operatorname{senx} + x \cos x}{x^3 \operatorname{sen}^2 x}$

Il segno è legato al numeratore.

$$2 \operatorname{senx} + x \cos x \geq 0 \iff \begin{cases} \operatorname{tgx} \geq -x/2 & \text{in } (0, \pi/2) \\ \operatorname{tgx} \leq -x/2 & \text{in } (\pi/2, \pi) \end{cases}$$



$F''(x) > 0$ in (α, π) essendo α un valore in $(\pi/2, \pi)$

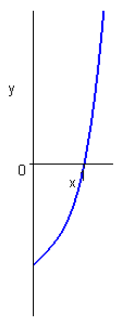


2.

La successione è ben definita e positiva.

$$a_{n+1} \geq a_n \iff a_n^{\,2} + a_n^{\,5} \geq 2\, a_n \iff a_n^{\,4} + a_n - 2 \geq 0$$

La disequazione si studia per via grafica senza difficoltà :



Dunque : $a_{n+1} \leq a_n \leftrightarrow a_n \leq 1$.

Proviamo per induzione che è sempre $a_n \leq 1$.

Per n=1 è vero per ipotesi (essendo $a_1 = ½$).

Se $a_n \leq 1$, $a_{n+1} = (a_n^5 + a_n^2) / 2 \leq (1 + 1) / 2 = 1$.

In conclusione, la successione è decrescente ed è sempre compresa tra 0 e ½; ammette dunque limite che è necessariamente il primo punto fisso che trova, cioè 0.

3.

Cerchiamo una soluzione dell'omogenea nella forma x^{α}. Sostituendo nell'equazione, si trova che deve essere $\alpha(\alpha - 1) - 2\alpha + 2 = 0$ cioè $\alpha = 1$ oppure $\alpha = 2$. Dunque le soluzioni dell'omogenea sono le funzioni della forma $c_1 x + c_2 x^2$.

Una soluzione particolare si trova con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie nella forma $c_1(x)\, x + c_2(x)\, x^2$. Con il procedimento consueto, si trova:

$$c_1'(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}} = -1 \Rightarrow c_1(x) = -x$$

$$c_2'(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}} = 1/x \Rightarrow c_2(x) = \log x \quad \text{(dovendo essere } x > 0\text{)}$$

Una soluzione particolare è dunque $-x^2 + x^2 \log x$.

In conclusione: $y(x) = c_1 x + c_2 x^2 - x^2 + x^2 \log x$, ovvero (ponendo $c_2^* = c_2 - 1$) $y(x) = c_1 x + c_2^* x^2 + x^2 \log x$.

Soluzioni [2]

1.

Consideriamo la funzione f (x) = 1 / x senx .

I punti di discontinuità più vicini all'estremo fisso di integrazione sono 0 e π; la funzione non è integrabile nell'intorno di nessuno dei due.

Infatti:

per $x \to 0$ $f(x) \approx 1 / x^2$, che non è integrabile nell'intorno di 0 essendo un infinito di ordine 2

per $x \to \pi$ $f(x) \approx 1 / \pi \,\text{senx} \approx 1 / \pi (\pi - x)$ (nel secondo passaggio abbiamo utilizzato la formula di Taylor di punto iniziale π), che non è integrabile nell'intorno di π essendo un infinito di ordine 1.

Studiamo adesso la funzione F (x).

C.E. (0 , π)

SGN la funzione f (x) è positiva nell'intervallo; il segno di F (x) dipende dunque solo dall'ordine dei due estremi di integrazione. In particolare, la funzione è positiva per x > 1, negativa per x < 1 , nulla per x = 1.

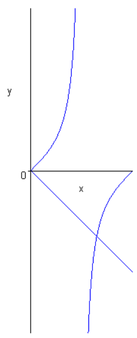
LIM per $x \to 0$ $F(x) \to -\infty$, per $x \to \pi$ $F(x) \to +\infty$

DRV F' (x) = 1 / x senx , sempre positiva nel C.E.

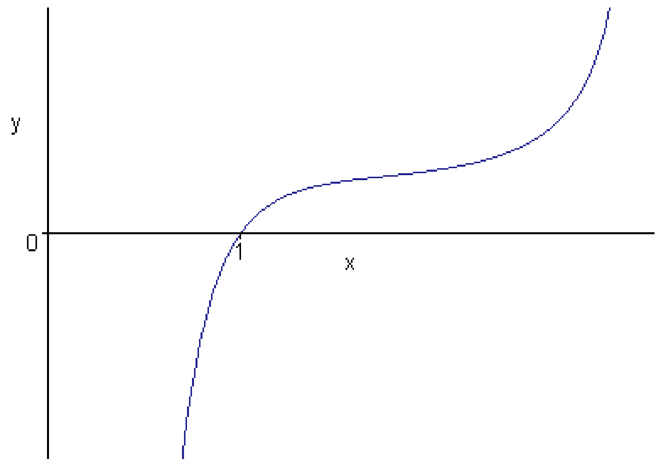
DRV^2 $$F''(x) = -\frac{\text{senx} + x\cos x}{x^2 \,\text{sen}^2 x}$$

Il segno è legato al numeratore.

$$\text{senx} + x \cos x \geq 0 \iff \begin{cases} \text{tgx} \geq -x & \text{in } (0, \pi/2) \\ \text{tgx} \leq -x & \text{in } (\pi/2, \pi) \end{cases}$$



F'' (x) > 0 in (α , π) essendo α un valore in (π/2, π)

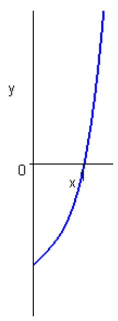


2.

La successione è ben definita e positiva.

$$a_{n+1} \geq a_n \iff a_n^2 + a_n^5 \geq 2\,a_n \iff a_n^4 + a_n - 2 \geq 0$$

La disequazione si studia per via grafica senza difficoltà :



Dunque : $a_{n+1} \geq a_n \leftrightarrow a_n \geq 1$.

Proviamo per induzione che è sempre $a_n \geq 1$.

Per n=1 è vero per ipotesi (essendo $a_1 = 2$).

Se $a_n \geq 1$, $a_{n+1} = (a_n^5 + a_n^2) / 2 \geq (1+1)/2 = 1$.

In conclusione, la successione è decrescente ed è sempre compresa tra 0 e ½; ammette dunque limite che è un punto fisso della successione oppure +∞. Poiché i punti fissi sono 0 e 1, la successione diverge.

3.

Cerchiamo una soluzione dell'omogenea nella forma x^α. Sostituendo nell'equazione, si trova che deve essere $\alpha(\alpha - 1) - 2 = 0$ cioè $\alpha = -1$ oppure $\alpha = 2$. Dunque le soluzioni dell'omogenea sono le funzioni della forma $c_1 / x + c_2 x^2$.

Una soluzione particolare si trova con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie nella forma $c_1(x) / x + c_2(x) x^2$. Con il procedimento consueto, si trova:

$$c_1'(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ 1/x & 2x \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1/x & x^2 \\ -1/x^2 & 2x \end{pmatrix}} = -1 \Rightarrow c_1(x) = -x/3 \Rightarrow c_1(x) = -x^2/6$$

$$c_2'(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} 1/x & 0 \\ -1/x^2 & 1/x \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1/x & x^2 \\ -1/x^2 & 2x \end{pmatrix}} = 1/3x^2 \Rightarrow c_2(x) = -1/3x$$

Una soluzione particolare è dunque $-x/2$.

In conclusione: $y(x) = c_1 / x + c_2 x^2 - x/2$.