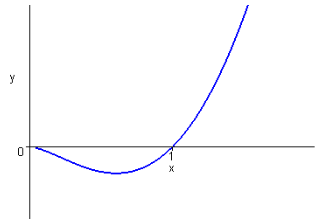
test [A] - soluzioni

1. **$k \geq -1/2e$**

Posto $f(x) = x^2 \log x$, si ha $f'(x) = x(2\log x + 1) \geq 0$ per $x \geq e^{-1/2}$. Inoltre $f(e^{-½}) = -1/2e$.



2. **$y(x) = x\,\mathrm{arctg}x - ½\log(1 + x^2) + 1$**

Integrando per parti : $\int \mathrm{arctg}x\,dx = x\,\mathrm{arctg}x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\,\mathrm{arctg}x - ½\log(1 + x^2) + c$.

Perché sia $y(0) = 1$, deve essere $c = 1$.

3. $\mathbf{M = \max_{x\in A} f(x) \Leftrightarrow}$

- $\exists x_0 \in A : f(x_0) = M$
- $\forall x \in A, f(x) \leq M$.

4. **Una funzione continua in un intervallo assume tutti i valori compresi tra inff e supf.**

oppure

Se una funzione continua in un intervallo assume due valori distinti, assume anche tutti i valori intermedi.

oppure

L'immagine di una funzione continua in in intervallo è anch'essa un intervallo.

5. **-1**

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Applicando inizialmente il teorema dell'Hopital, si ottiene: $\frac{\log(1+\mathrm{arctg}x)}{-\mathrm{tg}x} \approx \frac{x}{-x} \to -1$.

6. $\mathbf{R} - \{1\}$

Se $|x| > 1$, $|a_n| = \dfrac{|x|^n}{n(1+x^{2n})} \approx \dfrac{|x|^n}{n x^{2n}} = \dfrac{1}{n|x|^n}$.

Applicando il criterio della radice o quello del rapporto, si trova il limite $1 / |x| < 1$, e dunque la serie converge.

Se $|x| < 1$, $|a_n| = \dfrac{|x|^n}{n(1+x^{2n})} \approx \dfrac{|x|^n}{n}$.

Applicando il criterio della radice o quello del rapporto, si trova il limite $|x| < 1$, e dunque la serie converge.

Se $x = 1$, $a_n = 1 / 2n$ e la serie diverge; se $x = -1$, $a_n = (-1)^n / 2n$ e la serie converge.

test [B] - soluzioni

1. $\mathbf{y(x) = x \, arcsenx + \sqrt{1-x^2} + \pi/2 - 1}$

Integrando per parti : $\int \text{arcsenx}\, dx = x \,\text{arcsenx} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x\,\text{arcsenx} + \sqrt{1-x^2} + c$.

Perché sia y (0) = π/2 , deve essere c = π/2 - 1.

2. $\mathbf{m = \min_{x \in A} f(x) \iff}$

- $\mathbf{\exists x_0 \in A : f(x_0) = m}$
- $\mathbf{\forall x \in A, f(x) \geq m}$.

3. **Se f (x) è una funzione continua in [a , b] , derivabile in (a , b) e tale che f (a) = f (b) , esiste $\xi \in (a, b)$ tale che f ' (ξ) = 0.**

4. **1**

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Applicando inizialmente il teorema dell'Hopital, si ottiene: $\frac{\log(1+\text{senx})}{e^x \,\text{sen}(e^x - 1)} \approx \frac{x}{x} \to 1$.

5. $\mathbf{R - \{\pm 1\}}$

Se |x| > 1 , $|a_n| = \frac{|x|^n \sqrt{n}}{1+x^{2n}} \approx \frac{|x|^n \sqrt{n}}{x^{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{|x|^n}$.

Applicando il criterio della radice o quello del rapporto, si trova il limite 1 / |x| < 1 , e dunque la serie converge.

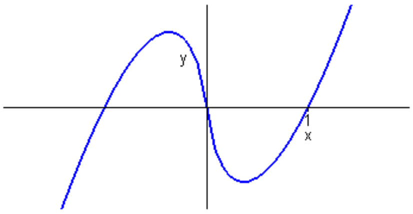
Se |x| < 1 , $|a_n| = \frac{|x|^n \sqrt{n}}{1+x^{2n}} \approx |x|^n \sqrt{n}$.

Applicando il criterio della radice o quello del rapporto, si trova il limite |x| < 1 , e dunque la serie converge.

Se x = 1 , $a_n = \sqrt{n} / 2$ e la serie diverge; se x = -1 , $a_n = (-1)^n \sqrt{n} / 2$ e la serie è indeterminata.

6. $\quad$ **$k \in \mathbf{R}$**

Posto $f(x) = x \log x^2$, si ha $f(x) \to \pm\infty$ per $x \to \pm\infty$. Inoltre $f'(x) = \log x^2 + 2 = 2(\log|x| + 1) \geq 0$ per $|x| \geq e^{-1}$. Infine $f(\pm e^{-1}) = \mp 2/e$. Per rispondere alla domanda bastava calcolare i limiti all'infinito e applicare il teorema dei valori intermedi.



test [C] - soluzioni

1.

- $\mathbf{x_0 \in A}$
- $\mathbf{\forall x \in A, f(x) \leq f(x_0)}$.

2. **Se f (x) è una funzione continua in [a , b] e derivabile in (a , b), esiste** $\xi \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ **tale che f ' (ξ) =** $\dfrac{\mathbf{f(b) - f(a)}}{\mathbf{b - a}}$.

3. **- 1 / 2**

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Applicando inizialmente il teorema dell'Hopital, si ottiene: $\dfrac{\log(1+\mathrm{tg}x)}{\dfrac{-2x\cos x^2}{1-\mathrm{sen}\, x^2}} \approx \dfrac{x}{-2x} \to -1/2$.

4. **R**

Se |x| > 1 , $|a_n| = \dfrac{|x|^n}{n^2(1+x^{2n})} \approx \dfrac{|x|^n}{n^2 x^{2n}} = \dfrac{1}{n^2 |x|^n}$.

Applicando il criterio della radice o quello del rapporto, si trova il limite 1 / |x| < 1 , e dunque la serie converge.

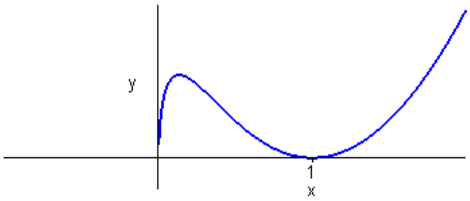
Se |x| < 1 , $|a_n| \cong \dfrac{|x|^n}{n^2}$.

Applicando il criterio della radice o quello del rapporto, si trova il limite |x| < 1 , e dunque la serie converge.

Se x = 1 , $a_n = 1 / 2n^2$, se x = -1 , $a_n = (-1)^n / 2n^2$: in entrambi i casi la serie converge.

5. **[0 , +∞)**

Posto $f(x) = x \log^2 x$, si ha $f'(x) = \log^2 x + 2\log x \geq 0$ per $x \leq e^{-2}$ o per $x \geq 1$; inoltre $f(e^{-2}) = 4 / e^2$; $f(1) = 0$.



6. $\mathbf{y (x) = x \, arccosx - \sqrt{1 - x^2} + 2}$

Integrando per parti : $\int \text{arccosx dx} = \text{x arccosx} + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \text{x arcsenx} - \sqrt{1 - x^2} + c$.

Perché sia y (0) = 1 , deve essere c = 2.

test [D] - soluzioni

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L > 0 \;\Rightarrow\; \exists U(x_0) : \forall x \in A \cap U(x_0) - \{x_0\},\ f(x) > 0$

2. **- 1 / 3**

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Applicando inizialmente il teorema dell'Hopital, si ottiene: $\dfrac{\log(1+\operatorname{arcsen} x)}{-2\,\mathrm{sen}\,2x + \mathrm{sen}x} \approx \dfrac{x}{-3x} \to -1/3$.

3. $\mathbf{R} - \{\pm 1\}$

Se $|x| > 1$, $|a_n| = \dfrac{|x|^n n^2}{1+x^{2n}} \approx \dfrac{|x|^n n^2}{x^{2n}} = \dfrac{n^2}{|x|^n}$.

Applicando il criterio della radice o quello del rapporto, si trova il limite $1 / |x| < 1$, e dunque la serie converge.

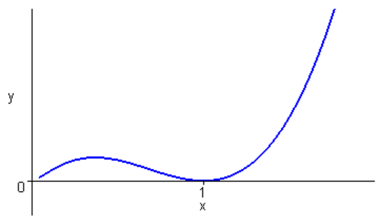
Se $|x| < 1$, $|a_n| \cong |x|^n n^2$.

Applicando il criterio della radice o quello del rapporto, si trova il limite $|x| < 1$, e dunque la serie converge.

Se $x = 1$, $a_n = n^2 / 2$, e la serie diverge ; se $x = -1$, $a_n = (-1)^n n^2 / 2$ e la serie è indeterminata.

4. **$[\,0 , +\infty)$**

Posto $f(x) = x^2 \log^2 x$, si ha $f'(x) = 2x\log^2 x + 2x\log x \ge 0$ per $x \le e^{-1}$ o per $x \ge 1$; inoltre $f(e^{-1}) = 1/e^2$; $f(1) = 0$.



5. **y (x) =** $\dfrac{2}{3}x^{3/2}\log x - \dfrac{4}{9}x^{3/2} + \dfrac{4}{9}$

Integrando per parti : $\int \sqrt{x}\,\log x\,dx = \dfrac{2}{3}x^{3/2}\log x - \dfrac{2}{3}\int \sqrt{x}\,dx = \dfrac{2}{3}x^{3/2}\log x - \dfrac{4}{9}x^{3/2} + c$.

Perché sia $y(1) = 0$, deve essere $c = 4/9$.

6.

- $\mathbf{x_0 \in A}$
- $\exists \mathbf{U(x_0)} : \forall \mathbf{x} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{U(x_0)}, \ \mathbf{f(x) \geq f(x_0)}$.