Soluzioni test [A]

1. **D**

Intanto la funzione deve essere positiva in (-1 , 1), il che esclude A e C.

Inoltre per x →+∞ deve essere f (x) → 0 , mentre per x →-∞ deve essere f (x) → -∞; questo fa scegliere la fig. D.

2. $-\dfrac{1}{\log x}+c$

Si integra per sostituzione, ponendo logx = t , dx / x = dt; si ottiene $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}+c = -\frac{1}{\log x}+c.$

3. **G (x) = 1 + x/3 + o (x)**

Poiché F (1) = 0, G (0) = 1. Inoltre G' (0) = 1 / F' (1) = 1 / 3. Dunque G (x) = 1 + x/3 + o (x) .

4. $\forall x \in I,\ f(x) \geq e\ ;\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{x} \in I:\ f(\bar{x}) < e+\varepsilon$

5. $y(x) = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + (\cos x + 2 \operatorname{sen} x)/5$

Le radici del polinomio caratteristico $k^2 + 2k + 2$ sono $-1 \pm i$; una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea è dunque data da $e^{-x}\cos x$, $e^{-x}\operatorname{sen} x$.

Passiamo in campo complesso con il termine noto e^{ix}; cerchiamo una soluzione particolare della forma $A e^{ix}$. Sostituendo nell'equazione, si trova che deve essere $A = 1/(1+2i) = (1-2i)/5$. Una soluzione particolare dell'equazione reale è dunque $\bar{y} = \operatorname{Re}\big((1-2i)(\cos x + i \operatorname{sen} x)/5\big) = (\cos x + 2\operatorname{sen} x)/5$

6. **λ = e / 2**

$$\log(e-\lambda x^2) = \log(e(1-\lambda x^2/e)) = 1+\log(1-\lambda x^2/e) = 1-\lambda x^2/e - \lambda^2 x^4/2e^2 + o(x^4)$$

$$f(x) = (1/2 - \lambda/e)x^2 - (\lambda^2/2e^2 + 1/24)x^4 + o(x^4).$$

Deve dunque essere λ = e / 2; in tal caso la funzione ha per parte principale $-x^4/6$.

Soluzioni test [B]

1. $-\dfrac{1}{2\log^2 x}+c$

Si integra per sostituzione, ponendo logx = t , dx / x = dt; si ottiene $\int \dfrac{dt}{t^3} = -\dfrac{1}{2t^2}+c = -\dfrac{1}{2\log^2 x}+c.$

2. $y(x) = e^x (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + (2\cos x + \operatorname{sen} x)/5$

Le radici del polinomio caratteristico $k^2 - 2k + 2$ sono $1 \pm i$; una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea è dunque data da $e^x \cos x$, $e^x \operatorname{sen} x$.

Passiamo in campo complesso con il termine noto e^{ix}; cerchiamo una soluzione particolare della forma $A e^{ix}$. Sostituendo nell'equazione, si trova che deve essere $A = 1 / (1 - 2i) = (1 + 2i) / 5$. Una soluzione particolare dell'equazione reale è dunque $\bar{y} = \operatorname{Imm}\big((1+2i)(\cos x + i \operatorname{sen} x)/5\big)$= (2 cosx + senx) / 5.

3. **B**

Intanto la funzione deve essere positiva in (-1 , 1), il che esclude A e C.

Inoltre per $x \to +\infty$ deve essere $f(x) \to -\infty$, mentre per $x \to -\infty$ deve essere $f(x) \to 0$; questo fa scegliere la fig. B.

4. **λ = 1 / 2e**

$$\log(1/e + \lambda x^2) = \log((1+\lambda e x^2)/e) = \log(1+\lambda e x^2) - 1 = -1 + \lambda e x^2 - \lambda^2 e^2 x^4/2 + o(x^4)$$

$$f(x) = (\lambda e - 1/2) x^2 + (1/24 - \lambda^2 e^2/2) x^4 + o(x^4).$$

Deve dunque essere λ = 1 /2e ; in tal caso la funzione ha per parte principale $-x^4 / 12$.

5. $\forall x \in I,\ f(x) \le \pi \ ;\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{x} \in I:\ f(\bar{x}) > e - \varepsilon$

6. **G (x) = ½ + x/3 + o (x)**

Poiché F (1/2) = 0, G (0) = 1/2. Inoltre G' (0) = 1 / F' (1/2) = 1/3. Dunque G (x) = 1/2 + x/3 + o (x) .