Soluzioni [1]

1. $f(t) = \dfrac{\lg(1+t)}{t}$ 　 $\underset{-1}{}$ sì $\underset{0}{+}$ sì $+$ no $\underset{+\infty}{}$

per $t \to 0$ 　 $f(t) \to 1$ 　 disc. elim.
per $t \to -1^+$ 　 $f(t) \sim -\lg(1+t) < \dfrac{1}{(t+1)^\alpha}$
scegliamo $\alpha < 1$
per $t \to +\infty$ 　 $f(t) \sim \dfrac{\lg t}{t} > \dfrac{1}{t}$

$F(x)$ 　 C.E. 　 $[-1, +\infty)$

SGN 　 $\underset{-1}{} \; - \; \underset{0}{0} \; +$

LIM 　 per $x \to -1^+$ 　 $F(x) \to c \in \mathbb{R}^-$
per $x \to +\infty$ 　 $F(x) \to +\infty$
$F(0) = 0$

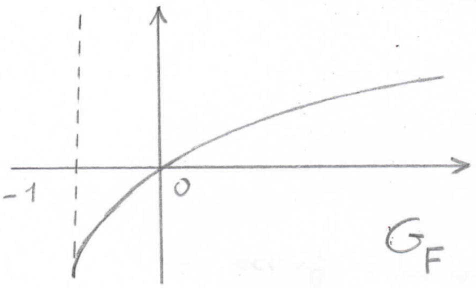
DRV 　 $\dfrac{\lg(1+x)}{x}$ 　 $\underset{-1}{-\infty} \; + \; \underset{0}{1} \; +$

pto a tg. verticale

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x} \underset{H.}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

non c'è asintoto

DRV^2 　 $\dfrac{x - (1+x)\lg(1+x)}{x^2(1+x)}$



Il segno è quello del numeratore $N(x)$. Poiché $N'(x) = -\lg(1+x)$, $x=0$ è pto di max. Essendo $N(0)=0$, deduciamo $N(x) < 0$ $\forall x \neq 0$, e questo è anche il segno della derivata seconda

2. $x \in \mathbb{R}$, $y > 1$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}\,(y-1)} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\lg \frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\sqrt{y} = \frac{1+Ke^{x^2/2}}{1-Ke^{x^2/2}} \quad (K>0)$$

$$y = \left(\frac{1+Ke^{x^2/2}}{1-Ke^{x^2/2}}\right)^2$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}\,(y-1)} \underset{z=\sqrt{y}}{=} \int \frac{2}{z^2-1}\,dz =$$

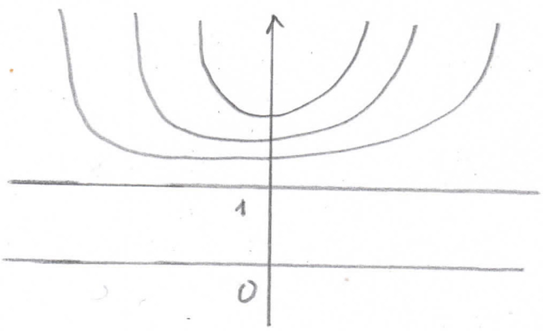
$$= \int \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) dz$$

$$= \lg \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + c =$$

$$= \lg \left| \frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1} \right| + c$$

deve essere $\dfrac{1+Ke^{x^2/2}}{1-Ke^{x^2/2}} > 1 \longrightarrow \dfrac{2Ke^{x^2/2}}{1-Ke^{x^2/2}} > 0 \longrightarrow e^{x^2/2} < \dfrac{1}{K}$

$x^2 < \lg \dfrac{1}{K^2} \longrightarrow |x| < \sqrt{\lg \dfrac{1}{K^2}}$ 　 $(0 < K < 1)$

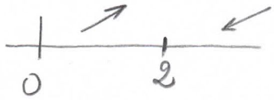


3.

La successione è ben definita e positiva

Per induzione:
$a_1 > 0$ è un dato
$a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ definito e positivo

$a_{n+1} \geq a_n \iff a_n \leq 2$



$a_n < 2 \Rightarrow a_{n+1} < 2$

Per induzione:
$a_1 < 2$ è un dato
$\sqrt{a_n + 2} < 2 \iff a_n < 2$.

Dunque, la successione è crescente e tende al punto fisso 2.

Studiamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (2-a_n)$ con il criterio del rapporto (serie a segno positivo):

$$\frac{2-a_{n+1}}{2-a_n} = \frac{2-\sqrt{2+a_n}}{2-a_n} = \frac{2-a_n}{(2-a_n)(2+\sqrt{2+a_n})} \to \frac{1}{4} < 1.$$

La serie converge.

Soluzioni [2]

1. $f(t) = \dfrac{\lg t}{t-1}$ $\quad$ $\underset{0}{\text{si}} + \underset{1}{\text{si}} + \underset{+\infty}{\text{no}}$ $\quad$ per $t \to 0$ $\; f(t) \sim -\lg t < \dfrac{1}{t^\alpha}$

scegliamo $\alpha < 1$

per $t \to 1$ $\; f(t) \to 1$ $\;$ disc. eliminabile

per $t \to +\infty$ $\; f(t) \sim \dfrac{\lg t}{t} > \dfrac{1}{t}$

$F(x)$ $\quad$ C.E. $[0, +\infty)$

SGN $\quad \underset{0}{} - \underset{1}{0} +$

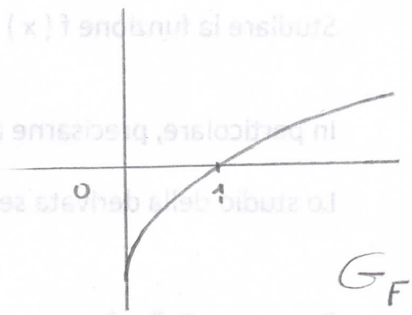
LIM $\quad$ per $x \to 0^+$ $\; F(x) \longrightarrow c \in \mathbb{R}^-$

per $x \to +\infty$ $\; F(x) \longrightarrow +\infty$

$F(1) = 0$

DRV $\quad \dfrac{\lg x}{x-1}$ $\quad \underset{0}{+\infty} + \underset{1}{1} +$

$\hookrightarrow$ pto a tg. verticale



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} \underset{H.}{=} \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

non c'è asintoto

DRV^2 $\quad \dfrac{x - 1 - x \lg x}{x(x-1)^2}$

Il segno è quello del numeratore $N(x)$.
Poiché $N'(x) = -\lg x$, $x = 1$ è punto di massimo.
Essendo $N(1) = 0$, deduciamo $N(x) < 0 \;\; \forall x \neq 1$, e
questo è anche il segno della derivata seconda

2. $x \in \mathbb{R}$, $\; 0 < y < 1$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}\,(y-1)} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\lg \frac{1 - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{y}} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\sqrt{y} = \frac{1 - Ke^{x^2/2}}{1 + Ke^{x^2/2}}$$

$$y = \left(\frac{1 - Ke^{x^2/2}}{1 + Ke^{x^2/2}} \right)^2$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}\,(y-1)} \underset{z = \sqrt{y}}{=} \int \frac{2}{z^2 - 1}\, dz$$

$$= \int \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) dz$$

$$= \lg \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + c$$

$$= \lg \left| \frac{\sqrt{y} - 1}{\sqrt{y} + 1} \right| + c$$

Deve essere $\; 0 < \dfrac{1 - Ke^{x^2/2}}{1 + Ke^{x^2/2}} < 1 \longrightarrow \begin{cases} 1 - Ke^{x^2/2} > 0 \\ \dfrac{-2Ke^{x^2/2}}{1 + Ke^{x^2/2}} < 0 \end{cases} \longrightarrow e^{x^2/2} < \dfrac{1}{K}$

$x^2 < \lg \dfrac{1}{K^2} \rightarrow |x| < \sqrt{\lg \dfrac{1}{K^2}}$ $\quad (0 < K < 1)$

Le soluzioni si possono prolungare su tutto $\mathbb{R}$ saldandole con la fz. nulla, che è soluzione costante.

3. Il calcolo è del tutto analogo a quello sviluppato in [1], a cui si rimanda.
La successione tende (decrescendo) al punto fisso 3; la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (3-a_n)$ converge, dato che il criterio del rapporto fornisce il limite $\frac{1}{6} < 1$.