Soluzioni test - versione A

1. $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}(-x\cos x + \operatorname{sen} x)$

Il polinomio caratteristico $k^2 - 1$ ha le radici ±1 e dunque le soluzioni dell'equazione omogenea sono della forma $c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. A queste va aggiunta una soluzione particolare dell'equazione completa. Passiamo in campo complesso con il termine noto $x\, e^{ix}$ e cerchiamo una soluzione nella forma $(Ax + B)\, e^{ix}$. Sostituendo nell'equazione, si ottiene $z = (-x - i)\, e^{ix} / 2$; dunque y = Re z = $(-x\cos x + \operatorname{sen} x)/2$.

2. -∞

Per $x \to +\infty$ sen 1/x ≈ 1/x , log sen (1 / x) ≈ log (1 / x) = - logx.

Dunque f (x) ≈ x / -log x → -∞.

3. $2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x} + c$

Integriamo per parti : $2\sqrt{x}\log x - \int \frac{2\sqrt{x}}{x}\,dx = 2\sqrt{x}\log x - \int \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x} + c$

4. $2x^4/3$

$\operatorname{tg} x = x + x^3/3 + o(x^4)$ $\qquad$ $\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + o(x^4)$

$\operatorname{tg}^2 x = x^2 + 2x^4/3 + o(x^4)$ $\qquad$ $\operatorname{tg} x^2 = x^2 + o(x^4)$

$\log(1 + \operatorname{tg}^2 x) = x^2 + 2x^4/3 - x^4/2 + o(x^4) = x^2 + x^4/6 + o(x^4)$

$\log(1 + \operatorname{tg} x^2) = x^2 - x^4/2 + o(x^4)$

5. $\exists k > 0 : \left|\frac{a_n}{\log n}\right| \le k$ oppure (condizione più forte) $\exists k \in R - 0 : \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\log n} = k$

6. max = $1 + \sqrt{2}$, min = 0

f' (x) = - senx sgn (cosx) + cosx

I punti di max e min vanno cercati tra gli estremi dell'intervallo assegnato, i punti interni in cui f' non esiste (3π/2) , i punti interni in cui f' = 0 (3π/4). Calcolando il valore della funzione in questi punti e prendendo il valore più grande e quello più piccolo, si ottiene il risultato.

Soluzioni test - versione B

1. max = $\sqrt{2}$ - 1 , min = - 2

f' (x) = cosx sgn (senx) + senx

I punti di max e min vanno cercati tra gli estremi dell'intervallo assegnato, i punti interni in cui f' non esiste (0) , i punti interni in cui f' = 0 (3π/4). Calcolando il valore della funzione in questi punti e prendendo il valore più grande e quello più piccolo, si ottiene il risultato.

2. $-x^4/3$

$\operatorname{sen} x = x - x^3/6 + o(x^4)$ $\qquad \log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + o(x^4)$

$\operatorname{sen}^2 x = x^2 - x^4/3 + o(x^4)$ $\qquad \operatorname{sen} x^2 = x^2 + o(x^4)$

$\log(1+\operatorname{sen}^2 x) = x^2 - x^4/3 - x^4/2 + o(x^4) = x^2 - 5x^4/6 + o(x^4)$

$\log(1+\operatorname{sen} x^2) = x^2 - x^4/2 + o(x^4)$

3. $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c$

Integriamo per parti : $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$

$\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c$

4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{2^n} = 0$

5. $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}(-x \operatorname{sen} x - \cos x)$

Il polinomio caratteristico $k^2 - 1$ ha le radici ±1 e dunque le soluzioni dell'equazione omogenea sono della forma $c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. A queste va aggiunta una soluzione particolare dell'equazione completa. Passiamo in campo complesso con il termine noto $x e^{ix}$ e cerchiamo una soluzione nella forma $(Ax + B)e^{ix}$. Sostituendo nell'equazione, si ottiene $z = (-x - i)e^{ix}/2$; dunque y = Imm z = $(-x \operatorname{sen} x - \cos x)/2$.

6. 0

Per $x \to +\infty$ sen 1/x ≈ 1/x , log sen (1 / x) ≈ log (1 / x) = - logx.

Dunque f (x) ≈ - log x / -x → 0.