Soluzioni [1]

1. C.E. $x \neq -1$

SGN
$$\begin{array}{ccccccc} - & \times & - & 0 & + & 0 & + \\ & -1 & & 0 & & 1 & \end{array}$$

LIM per $x \to -1$ $f(x) \to -\infty$ as. verticale

per $x \to \pm\infty$ $f(x) \sim x \to \pm\infty$

per $x \to +\infty$ $f(x) - x = x\,\dfrac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{-2x}{\sqrt{x+1}\,(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}$

$\sim \dfrac{-2x}{2x} \to -1$; $y = x-1$ as. obliquo

Con calcoli analoghi si trova che $y = x-1$ è asintoto anche per $x \to -\infty$.

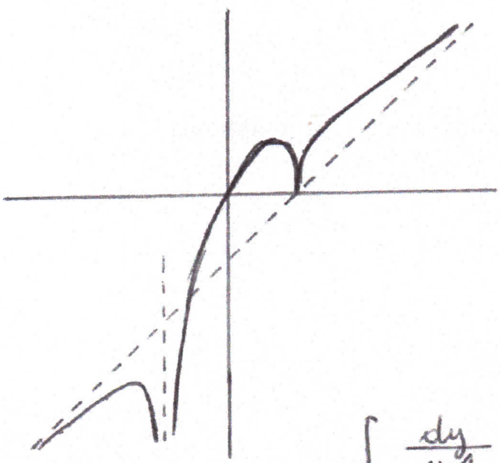
DRV $f'(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x^2-1}\sqrt{\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|}$, $x \neq \pm 1$

$$\begin{array}{ccccccccc} — & 0 & --- & \times & — & 0 & ---- & \times & — \\ & \frac{-1-\sqrt5}{2} & & -1 & & \frac{-1+\sqrt5}{2} & & 1 & \end{array}$$

CUSPIDE

DRV² $f''(x) = \dfrac{x-2}{(x^2-1)^2}\sqrt{\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|}$

$$\begin{array}{ccccccc} ----- & \times & --------- & \times & - & 0 & — \\ & -1 & & 1 & & 2 & \end{array}$$



2. $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

$y = 0$ sol. costante

Data la C.I. la studiamo per $y > 0$.
Con le notazioni introdotte a lezione, $B(y) = y^4$, $B'(1)$ esiste: questo assicura l'unicità di soluz. del problema.

$$\int \frac{dy}{y^4} = \int \cos x \, dx \longrightarrow -\frac{1}{3y^3} = \operatorname{sen} x - \frac{c}{3}$$

La C.I. è verificata per $c = 1$.

$$-\frac{1}{3y^3} = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \longrightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{1-3\operatorname{sen} x}} \;;$$

deve essere $1 - 3\operatorname{sen} x > 0$, cioè $x \in \left(-\pi - \operatorname{arcsen}\frac{1}{3}, \operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right)$

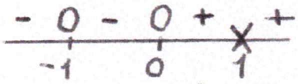
3. È una serie a segno alterno.
Non converge assolutamente perché, posto $|a_k| = \sqrt{k}/k+1$, si ha

$$|a_k| \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$$

che è il termine generale di una serie armonica divergente.
La convergenza della serie si può invece dedurre dal teorema di Leibniz. Infatti $|a_k|$ tende a zero (l'abbiamo verificato con il calcolo precedente) ed è decrescente (almeno definitivamente). Per provare la decrescenza, si può utilizzare la fz. $f(x) = \sqrt{x}/(x+1)$ e verificare che è $f'(x) < 0$ (almeno da un certo punto in poi).
È infatti $f'(x) = \dfrac{1-x}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2} \sim -\dfrac{1}{x^{3/2}}$.

Soluzioni [2]

1. C.E. $\quad x \neq 1$

SGN $\quad$ 

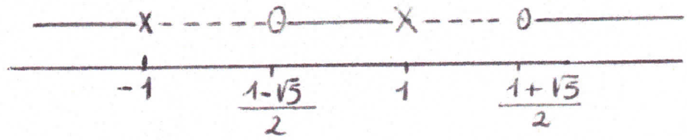
LIM $\quad$ per $x \to 1$ $\quad f(x) \to +\infty$ as. verticale

per $x \to \pm\infty$ $\quad f(x) \sim x \to \pm\infty$

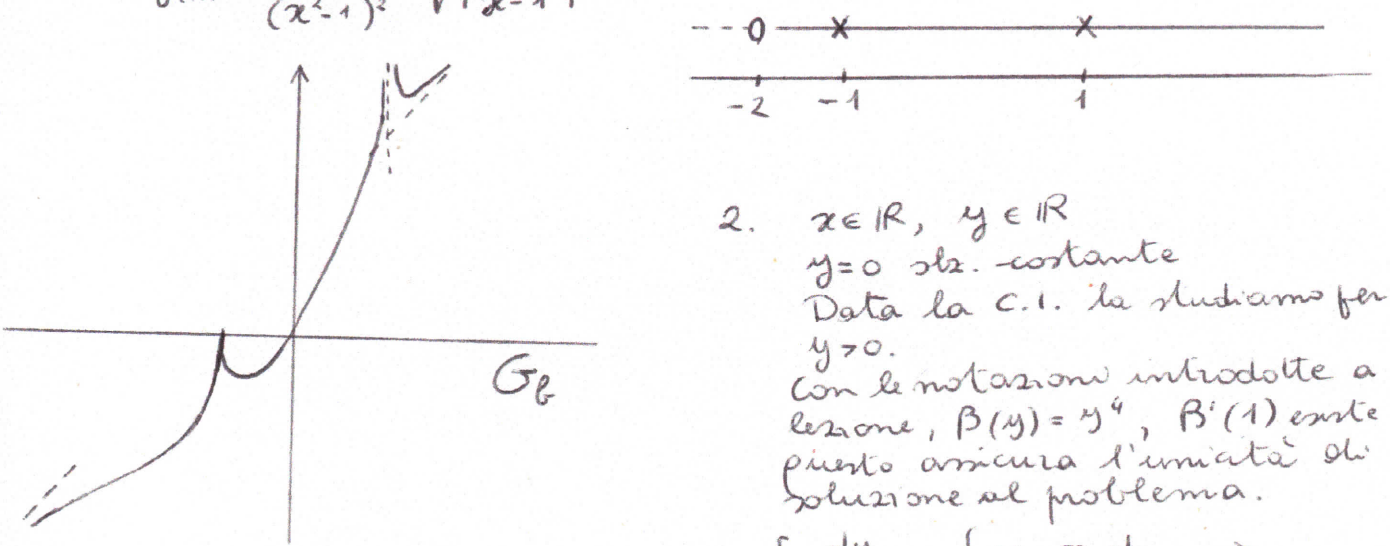
per $x \to +\infty$ $\quad f(x) - x = x \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{2x}{\sqrt{x-1}\,(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}$

$\sim \dfrac{2x}{2x} \to 1$; $y = x+1$ asintoto obliquo.
Con calcoli analoghi si trova che $y = x+1$ è asintoto anche per $x \to -\infty$.

DRV $\quad f'(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 - 1} \sqrt{\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|}$, $x \neq \pm 1$



DRV^2 $\quad f''(x) = \dfrac{x+2}{(x^2-1)^2} \sqrt{\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|}$



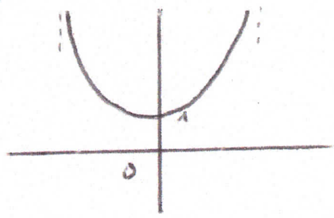
2. $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$
$y = 0$ slz. costante
Data la C.I. la studiamo per $y > 0$.
Con le notazioni introdotte a lezione, $\beta(y) = y^4$, $\beta'(1)$ esiste: questo assicura l'unicità di soluzione al problema.

$\displaystyle\int \frac{dy}{y^4} = \int \operatorname{sen} x \, dx \to$

$-\dfrac{1}{3y^3} = -\cos x - c$; la C.I. è verificata per $c = -2/3$.

$-\dfrac{1}{3y^3} = -\cos x + \dfrac{2}{3} \to y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3\cos x - 2}}$;

deve essere $3\cos x - 2 > 0$, cioè $|x| < \arccos \frac{2}{3}$



3. Serie a segno alterno.
Non converge assolutamente perché, posto $|a_k| = \dfrac{k}{4+k^2}$, si ha $|a_k| \sim \dfrac{1}{k}$ che è il termine generale di una serie armonica divergente.
La convergenza della serie segue dal teorema di Leibniz, perché $|a_k|$ tende a 0 (l'abbiamo già verificato) decrescendo (almeno definitivamente). Infatti, se $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$, $f'(x) = \dfrac{4-x^2}{(4+x^2)^2} \sim -\dfrac{1}{x^2} \to 0^-$.