Lo spazio $V \oplus W$ contiene le somme di vettori di V e di W: $v \in V$, $w \in W$, allora $(v, w) \to v + w \in V \oplus W$

Allo stesso modo, vorremmo uno spazio vettoriale U che contiene "i prodotti" di vettori di V e di W: $(v, w) \to vw \in U$; i prodotti li vogliamo distributivi rispetto alla $+$:

$v(w+u) = vw + vu$, $(u+v)w = uw + vw$. Vogliamo anche che U sia "abbastanza grande" in modo che se (v_i) è base di V, (w_j) è base di W, allora i "prodotti" $v_i w_j$ siano indipendenti, e anche che U sia il più "piccolo" spazio con queste proprietà. Formalizziamo quindi la cosa dicendo che c'è un'applicazione bilineare $\otimes : V \times W \to U$, $(v, w) \to v \otimes w$ (che quindi ha le proprietà distributive rispetto alla somma, se la si vede come una sorta di prodotto) e che $v_i \otimes w_j$ formano una base di U.

A differenza dello $\oplus$, non c'è un modo naturale per cui si possa vedere V e W inclusi in $U = V \otimes W$ (per $V \oplus W$, si ha $v \to (v, 0)$, $w \to (0, w)$ sono inclusioni naturali).

<u>Esercizio</u>. Se $v \otimes w = 0$ in $V \otimes W$ allora o $v = 0$ oppure $w = 0$ [$v = \sum \alpha_i v_i$, $w = \sum \beta_j w_j$ allora $v \otimes w = \sum \alpha_i \beta_j v_i \otimes w_j$, quindi $\alpha_i \beta_j = 0$, $\forall i, j$. Se $\exists \alpha_i \neq 0 \Rightarrow \beta_j = 0 \ \forall j$].

<u>Esercizio</u>: dimostrare che se $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indip. in V allora $v_1 \otimes w, \dots, v_n \otimes w$ sono lin. indip. in $V \otimes W$ se $w \neq 0$ [infatti: $\sum \lambda_i (v_i \otimes w) = (\sum \lambda_i v_i) \otimes w = 0 \Rightarrow$ $(w \neq 0)$ che $\sum \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i$]

Segue che $V \to V \otimes w$ è un'inclusione, $\forall w \neq 0$ (ma non c'è un $w \neq 0$ "privilegiato").

<u>Proprietà universale del prodotto tensoriale</u> (su alcuni testi è la definizione di prodotto tensoriale).

U, φ è prodotto tensoriale di $V, W \Leftrightarrow$ $\forall$ applicazione bilineare $\psi : V \times W \to Z$, $\exists !$ $f : U \to Z$ <u>lineare</u> t.c. $\psi = f \circ \varphi$.

dim. Scelte basi $\{v_i\}$, $\{w_j\}$, ψ è determinata dai $\psi(v_i, w_j)$. Basta mettere

$f(u_{ij}) = \psi(v_i, w_j)$ ed estendere linearmente: $\psi\left(\sum \alpha_i v_i, \sum \beta_j w_j\right) =$

$\sum \alpha_i \beta_j \psi(v_i, w_j) = \sum \alpha_i \beta_j f(u_{ij}) = f\left(\sum_{ij} \alpha_i \beta_j u_{ij}\right) = f\left(\sum_{ij} \alpha_i \beta_j \varphi(v_i, w_j)\right)$

$= f\varphi\left(\sum \alpha_i v_i, \sum \beta_j w_j\right)$.

Viceversa, dato Z, ψ t.c. $\psi(v_i, w_j)$ è una base di Z, allora da $\psi(v_i,w_j) = f(\varphi(v_i,w_j))$ segue che gli nm vettori $\varphi(v_i,w_j)$ sono linearmente indipendenti. Se $U' = \mathrm{Span}(\varphi(v_i,w_j)) \subsetneq U$, completandoli a base si potrebbe definire arbitrariamente f sui rimanenti vettori, rimanendo vera la $\psi = f \circ \varphi$. —

Esempio. $V = W = \mathbb{R}^2$ con basi canoniche $\{e_i\}$. Sia $\psi : V \times W \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare canonico (bilineare simmetrico). Allora $\psi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Sia $U = M_2(\mathbb{R})$, $u_{ij} = E^{(ij)}$ base canonica, con $\varphi : V \times W \to U$ con $\varphi(e_i, e_j) = E^{(ij)}$.

Sarà $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ data da $f(E^{(ij)}) = \psi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Allora se $A = (a_{ij}) \in U$,

$$f(A) = f\left(\sum_{ij} a_{ij} E^{(ij)}\right) = \sum_{ij} a_{ij} f(E^{(ij)}) = \sum a_{ij} \delta_{ij} = \sum_i a_{ii} = \mathrm{tr}(A).$$

Esercizio Trovare f quando $V = W = \mathbb{R}^3$, $\{e_i\}$ basi canoniche, $\psi : V \times W \to \mathbb{R}^3$ prodotto vettore $\psi(v, w) = v \times w$, e prendendo $U = M_3(\mathbb{R})$, $u_{ij} = E^{(ij)}$ base canonica.

C'è un prodotto tensoriale "canonico"?

La costruzione fatta di un prodotto tensoriale $V \otimes W$ richiedeva apparentemente una scelta di basi $\{v_i\}$ di V e $\{w_j\}$ di W (in realtà si è visto che più che la scelta delle basi è l'applicazione $\varphi: V \times W \to U$ che determina la struttura).

Sia V' uno spazio (di dim n) che ha un pairing (accoppiamento) con V: $\langle \cdot , \cdot \rangle : V' \times V \to \mathbb{K}$, ($\langle v', v \rangle \in \mathbb{K}$) dove $\langle \cdot , \cdot \rangle$ è bilineare e assumiamo che sia non-degenere:

$$\nexists\ v' \in V' \setminus \{0\} \text{ t.c. } \langle v', v \rangle = 0 \quad \forall v, \quad \text{e } \nexists\ v \in V \setminus \{0\} \text{ t.c. } \langle v', v \rangle = 0 \quad \forall v'.$$

Esempi: 1) $V' = V$ e $\langle \cdot , \cdot \rangle$ prodotto scalare non degenere.

2) $V' = V^*$ con $\langle v', v \rangle = v'(v)$.

Oss. Se V' e V hanno un pairing allora $\dim V = \dim V'$. Infatti, se $n = \dim V$, consideriamo l'appl. lineare: $\gamma: V' \to \mathbb{K}^n$: $\gamma(v') = (\langle v', v_1 \rangle, \langle v', v_2 \rangle, \dots, \langle v', v_n \rangle)$ (dove (v_i) è base di V). γ è iniettiva: $\gamma(v') = \underline{0} \Rightarrow \langle v', v \rangle = 0 \ \forall v \in V$, quindi per ipotesi $v' = 0$. Similmente $\delta: V \to \mathbb{K}^m$; $\delta(v) = (\langle v'_1, v \rangle, \dots, \langle v'_m, v \rangle)$ ((v'_i) base di V') è iniettiva, quindi $\dim V = \dim V'$.

<u>Oss</u>. $\forall$ base (v_i) di V, $\exists$ base "duale" (v_i^*) di V', definita da $\langle v_i^*, v_j \rangle = \delta_{ij}$. Infatti dato il vettore e_i della base canonica di $\mathbb{K}^n$, $\exists$ unico $v_i^* \in V'$ t.c. $\gamma(v_i^*) = e_i$. Questo significa proprio $\langle v_i^*, v_j \rangle = \delta_{ij}$.

Prop. Se V', W' hanno un pairing con V e W, allora $V \otimes W$ si realizza in modo naturale come lo spazio

$$U = \mathrm{Bil}(V', W')$$

delle applicazioni bilineari di $V' \times W' \to \mathbb{K}$, dove $\varphi : V \times W \to U$ è dato da $\varphi(v,w)(v',w') = \langle v', v \rangle \langle w', w \rangle$

dim $\dim U = \dim V' \cdot \dim W' = \dim V \cdot \dim W$.

È chiaro che $\varphi(v,w) : U \to \mathbb{K}$ è bilineare $\forall v, w$ e quindi φ è effettivamente una applicazione da $V \times W$ in U. È altrettanto evidente che φ dipende in modo bilineare da v e da w.

Se (v_i) e (w_j) sono basi di V e W, se si ha

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} \varphi(v_i, w_j) = 0 \quad \text{, allora} \quad \sum_{ij} \alpha_{ij} \langle v', v_i \rangle \langle w', w_j \rangle = 0 \quad , \forall v', w'.$$

Prendendo $v' = v_i^*$, $w' = w_j^*$ si trova $\alpha_{ij} = 0$, per cui $\varphi(v_i, w_j)$ è una base di U.

L'identificazione $V \otimes W \cong Bil(V^* \times W^*)$, dove V^* e W^* sono gli spazi duali, è in un certo senso canonica, in quanto si ha una applicazione bilineare di $V \times W$ che non dipende dalla scelta di basi.

(Questa è la definizione in alcuni testi)

Avere un pairing $V' \times V \to \mathbb{K}$ significa sostanzialmente avere una identificazione tra V' e il duale V^*. Ad esempio, se in V c'è un prodotto scalare non degenere $\langle , \rangle$, l'applicazione $V \to V^*$ che manda v' nel funzionale lineare $v \to \langle v', v \rangle$ è un isomorfismo (esercizio!).

oss Si ha un isomorfismo naturale tra V e lo spazio duale di V^* (il "biduale") (nel caso in cui $\dim V$ è finita).
Infatti l'applicazione $V \to (V^*)^* = V^{**}$ che manda:

$$v \longrightarrow [v' \to v'(v)]$$

(cioè v va nel funzionale su V^* che manda un funzionale v' su V nella sua valutazione su v) è evidentemente lineare ed è iniettiva, perché se $v \neq 0$, il funzionale $v' \to v'(v)$ non è zero (verificarlo)
Quindi identificando V con il biduale V^{**}, si ha che

$$V^* \otimes W^* \cong Bil(V \times W)$$

<u>oss.</u> $V^* \otimes W \cong \mathcal{L}(V, W)$, dove $\mathcal{L}(V,W)$ sono le applicazioni lineari di V in W. L'isomorfismo è dato da

$v' \otimes w \longrightarrow f: V \to W$ con $f(v) = v'(v) \cdot w$

(quindi un tensore decomponibile va in un'applicazione di rango 1)
Quindi si estende linearmente a tutti i tensori:

$$\sum \alpha_{ij}\, v_i' \otimes w_j \to \left[v \xrightarrow{f} \sum \alpha_{ij}\, v_i'(v)\, w_j \right]$$

Se (v_i') è la base duale di (v_i) di V, allora $v_i' \otimes w_j$ va nell'applicazione che manda v_i in w_j e $v_j \to 0$ se $i \neq j$. Le $v_i' \otimes w_j$ formano una base di $\mathcal{L}(V,W)$.

Si noti in particolare $V^* \otimes V = End(V)$ si identifica allo spazio degli endomorfismi di V (e $V \otimes V^* \cong End(V^*)$).

Prodotto di più spazi. Dati 3 spazi vett. su $\mathbb{K}$ V^n, W^m, Z^p, con basi $v_i, i=1,\dots,n$; $w_j, j=1,\dots,m$; $z_k, k=1,\dots,p$. Sia $U=V\otimes W$, con $\varphi: V\times W\to U$ t.c. $u_{ij}=\varphi(v_i,w_j)$ è una base. Si può costruire il prodotto tensoriale $T=U\otimes Z=(V\otimes W)\otimes Z$, con $\psi: U\times Z\to T$ bilineare t.c. $\psi(u_{ij},z_k)=t_{ij,k}$ è una base di T.

Analogamente, si può costruire $U'=W\otimes Z$ con $\varphi': W\times Z\to U'$ t.c. $\varphi'(w_j,z_k)=u'_{jk}$ è base di U', e $T'=V\otimes U'=V\otimes(W\otimes Z)$ con $\psi': V\times U'\to T'$ bilineare e $\psi'(v_i,u'_{jk})=t'_{i,jk}$ base di T'.

Si noti che le applicazioni

$$\lambda: V\times W\times Z\longrightarrow T: \quad \lambda(v,w,z)=\psi(\varphi(v,w),z) \quad \text{e}$$

$$\lambda': V\times W\times Z\longrightarrow T': \quad \lambda'(v,w,z)=\psi'(v,\varphi'(w,z))$$

sono applicazioni trilineari.

Si può inoltre considerare uno spazio T'' di dimensione nmp, tale che $\exists\ \lambda'': V\times W\times Z\to T''$ trilineare e tale che $t''_{ijk}=\lambda''(v_i,w_j,z_k)$ sia una base di T''.

Si dimostra molto facilmente:

Teorema 1) Gli isomorfismi tra T, T', T'' che fanno corrispondere le basi

$$\begin{tikzcd} t_{ij,k} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\gamma"'] & t'_{i,jk} \arrow[r, "\beta"] & t''_{ijk} \end{tikzcd}$$

commutano con le applicazioni trilineari associate:

$$\alpha\circ\lambda=\lambda', \quad \beta\circ\lambda'=\lambda'', \quad \gamma\circ\lambda=\lambda''.$$

Possiamo quindi identificare T, T' con T'', scrivendo

$$T''=V\otimes W\otimes Z.$$

(e si può cioè dire che $\otimes$ è associativo)

2) Definendo quindi $V\otimes W\otimes Z$ come una coppia T,λ, con T spazio vettoriale e $\lambda: V\times W\times Z \to T$ trilineare e t.c. $t_{ijk}=\lambda(v_i,w_j,z_k)$ sia una base di T, si verifica allora la <u>proprietà universale</u>: $\forall$ applicazione trilineare $\mu: V\times W\times Z\to X$, $\exists$

unica applicazione lineare $\nu: T\to X$ t.c. $\mu=\nu\circ\lambda$

(e questa potrebbe essere presa come definizione di prodotto tensoriale).

3) In analogia al caso di due fattori si ha:

$$V\otimes W\otimes Z = Tri(V^*\times W^*\times Z^*)$$

con $Tri(X\times Y\times Z)$ lo spazio delle applicazioni trilineari $X\times Y\times Z\to \mathbb{K}$.

L'applicazione $\lambda: V\times W\times Z\to Tri(V^*\times W^*\times Z^*)$ è data da:

$\lambda(v,w,z)$ è l'applicazione trilineare che agisce sulle terne di funzionali (v',w',z') come

$$\lambda(v,w,z)(v',w',z') = v'(v)\,w'(w)\,z'(z)$$

Anche in questo caso un tensore $u=\sum_{ijk} u_{ijk}\, v_i\otimes w_j\otimes z_k$ si dirà decomponibile se $u=\lambda(v,w,z)$ per qualche $(v,w,z)\in V\times W\times Z$. Quindi scrivendo $v=\sum \alpha_i v_i$, $w=\sum \beta_j w_j$, $z=\sum \gamma_k z_k$ segue

$$u_{ijk}=\alpha_i\beta_j\gamma_k$$

Anche in questo caso i tensori decomponibili risultano molto meno di tutti i possibili tensori (la condizione corrisponde a una qualche nozione, per una tabella 3-dimensionale di numeri, di avere "rango" 1).

Si può chiaramente proseguire facendo il prodotto tensoriale di n spazi vettoriali $V, W, \dots, Z$; anche qui l'associatività dice che tale prodotto è naturalmente isomorfo a uno spazio $T := V \otimes W \otimes \dots \otimes Z$, dotato di un'applicazione n-lineare $\lambda : V \times W \times \dots \times Z \to T$, e tale che $\lambda(v_{i_1}, w_{i_2}, \dots, z_{i_k}) = t_{i_1 \dots i_k}$ sia una base di T.

Vale la proprietà universale (per appl. n-lineari).

Ancora: $V \otimes W \otimes \dots \otimes Z = Mult(V^* \times W^* \times \dots \times Z^*)$ dove quest'ultimo è lo spazio delle applicazioni multilineari di $V^* \times W^* \times \dots \times Z^*$ in $\mathbb{K}$.

Un tensore $u = \sum u_{i_1 \dots i_k} v_{i_1} \otimes w_{i_2} \otimes \dots \otimes z_{i_k}$ è decomponibile se $u = \lambda(v, w, \dots, z)$, per qualche $(v, w, \dots, z) \in V \times W \times \dots \times Z$, e questo si verifica se $\exists$ numeri $\alpha_i, \beta_j, \dots, \gamma_l$ t.c.

$$u_{i_1 \dots i_k} = \alpha_{i_1} \beta_{i_2} \cdots \gamma_{i_k}$$

Anche qui i tensori decomponibili costituiscono piccola parte di tutti i tensori ($\dim V \times W \otimes \dots \otimes Z = \dim V \dim W \cdots \dim Z$).

esercizio: determinare il numero di parametri da cui dipendono i tensori decomponibili).

Cambiamento di base e convenzioni sugli indici.

Notazione: scriviamo le coordinate dei vettori $v \in V$ con indice in alto, le basi con indice in basso. Quindi $v = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$, (e_i) base di V.

Alcuni libri adottano anche la cosiddetta convenzione di Einstein:

gli indici ripetuti si sommano, quindi: $v = \sum_i x^i e_i = x^i e_i$

sottintendendo la somma (e l'intervallo della somma).

Sia $f_1, \dots, f_n$ un'altra base di V, con matrice di cambio base $P \in GL_n(\mathbb{K})$ (quindi $P = M^{(e_i)}_{(f_j)}(id)$, cioè $e_j = \sum_i p^i_j f_i = p^i_j f_i$)

Sappiamo che le coordinate cambiano come

$$v = \sum_j x^j e_j = \sum_j x^j \left(\sum_i p^i_j f_i\right) = \sum_i \left(\sum_j x^j p^i_j\right) f_i = \sum_i (x')^i f_i$$

quindi

$$(x')^i = \sum_j x^j p^i_j \qquad \left[\underline{x}' = P\, \underline{x} \text{ in notazione matriciale}\right]$$

Consideriamo ora un tensore in un prodotto tensoriale di k-spazi:

$$u \in U = V_1 \otimes \dots \otimes V_k \quad , \quad \text{con } \dim V_j = n_j$$

Occorre (purtroppo) introdurre un altro indice per gli spazi: la base di V_h sia $e^{(h)}_1, \dots, e^{(h)}_{n_h}$ (brevemente $(e^{(h)}_i)$)

Ci chiediamo come cambiano le coordinate di un tensore

$$u = \sum u^{i_1 \dots i_k} e^{(1)}_{i_1} \otimes \dots \otimes e^{(k)}_{i_k} \qquad [\text{notare gli indici in alto!}]$$
$$= u^{i_1 \dots i_k} e^{(1)}_{i_1} \otimes \dots \otimes e^{(k)}_{i_k}$$

quando si passa dalla base $(e^{(1)}_{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{(k)}_{i_k})$ di $V_1\otimes\cdots\otimes V_k$ alla base $(f^{(1)}_{i_1}\otimes\cdots\otimes f^{(k)}_{i_k})$ dove $e^{(h)}_j = \sum_i (P^{(h)})^i_j f^{(h)}_i$, essendo $(f^{(h)}_i)$ un'altra base di V_h e $P^{(h)}$ la matrice di passaggio.

Basta sostituire ~~gli~~ $e^{(h)}_j$:

$$e^{(1)}_{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{(k)}_{j_k} = \left(\sum_{i_1}(P^{(1)})^{i_1}_{j_1} f^{(1)}_{i_1}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\sum_{i_k}(P^{(k)})^{i_k}_{j_k} f_{i_k}\right) = \sum_{i_1\dots i_k}(P^{(1)})^{i_1}_{j_1}(P^{(2)})^{i_2}_{j_2}\cdots(P^{(k)})^{i_k}_{j_k} f_{i_1}\otimes\cdots\otimes f_{i_k}$$

e

$$u = \sum_{j_1,\dots,j_k} u^{j_1\dots j_k} e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_k} = \sum_{i_1,\dots,i_k}\left(\sum_{j_1,\dots,j_k} u^{j_1\dots j_k}(P^{(1)})^{i_1}_{j_1}(P^{(2)})^{i_2}_{j_2}\cdots(P^{(k)})^{i_k}_{j_k}\right) f_{i_1}\otimes\cdots\otimes f_{i_k}$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_k}(u')^{i_1\dots i_k} f_{i_1}\otimes\cdots\otimes f_{i_k}$$

quindi

$$(u')^{i_1\dots i_k} = \sum_{j_1,\dots,j_k}(P^{(1)})^{i_1}_{j_1}(P^{(2)})^{i_2}_{j_2}\cdots(P^{(k)})^{i_k}_{j_k}\, u^{j_1\dots j_k} \qquad (*)$$

Esercizio. Verificare che la matrice di passaggio dalla base $(e^{(1)}_{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{(k)}_{i_k})$ di $V_1\otimes\cdots\otimes V_k$ alla base $(f^{(1)}_{i_1}\otimes\cdots\otimes f^{(k)}_{i_k})$ è data da

$$P^{(1)}\otimes\cdots\otimes P^{(k)}$$

cioè dal prodotto di Kronecker delle k matrici di passaggio base, definito induttivamente come $P^{(1)}\otimes\cdots\otimes P^{(k)} = (P^{(1)}\otimes\cdots\otimes P^{(k-1)})\otimes P^{(k)}$.

In seguito considereremo il caso in cui tutti i V_i sono uguali a un singolo V; $\quad U = V \otimes \cdots \otimes V$ n volte, scritto anche $U = V^{\otimes k}$

e quindi $e_i^{(h)} = e_i$, $f_j^{(h)} = f_j$, $P^{(h)} = P$; (*) diventa:

$$u = \sum_{j_1, \dots, j_k} u^{j_1 \dots j_k} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k} = \sum_{i_1, \dots, i_k} \left(\sum_{j_1, \dots, j_k} u^{j_1 \dots j_k} p^{i_1}_{j_1} p^{i_2}_{j_2} \cdots p^{i_k}_{j_k} \right) f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}$$

Oppure il caso in cui qualche $V_i = V$ e altri sono il duale V^*:

$$U = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q}$$

In questo caso se (e_i) è base di V, si prende di solito la base duale $e_i^* = e^i$ (indice in alto) $\left(e^i(e_j) = \delta^i_j \right)$. I vettori di V^* si diranno anche co-vettori e nella base duale si scrivono

$$v' = \sum_i x_i e^i \qquad , x_i \in \mathbb{K}.$$

Se P è la matrice di passaggio dalla base (e_i) alla (f_j) in V, qual è la matrice di passaggio dalla base duale (e^i) di (e_i) alla base duale (f^j) di (f_j) in V^* ?

Sia $\quad e^i = \sum_j q^i_j f^j \quad$, $Q = (q^i_j)$ la matrice di passaggio. Da

$$\delta^i_h = e^i(e_h) = \sum_j q^i_j f^j(e_h) = \sum_j q^i_j f^j\left(\sum_k p^k_h f_k \right) =$$

$$= \sum_j \sum_k q^i_j p^k_h f^j(f_k) =$$

$$= \sum_j q^i_j \, p^j_h \quad \Rightarrow \quad QP = I$$
$$\Rightarrow \quad Q = P^{-1}$$

ATTENZIONE: secondo la convenzione usuale di matrice di passaggio tra basi, se $e^i = \sum q^i_j f^j$ l'indice j dovrebbe essere quello di riga! quindi, se usiamo questa convenzione sia per V che per V^*, la "vera" matrice di passaggio è ${}^tP^{-1}$.
Manterremo però questa scrittura, che implica che per V il passaggio di base è scritto $(e_1 \cdots e_n) = (f_1 \cdots f_n)\,P$, mentre per le basi duali: $\begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix}$

Allora in U si passa dalla base $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{i_{p+1}} \otimes \cdots \otimes e^{i_{p+q}}$ alla $f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_p} \otimes f^{i_{p+1}} \otimes \cdots \otimes f^{i_{p+q}}$

e un tensore u si scrive:

$$u = \sum_{j_1, \dots, j_{p+q}} u^{j_1, \dots, j_p}_{j_{p+1} \cdots j_{p+q}} \; e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p} \otimes e^{j_{p+1}} \otimes \cdots \otimes e^{j_{p+q}}$$

con cambiamento di base dato da

$$u = \sum_{i_1, \dots, i_{p+q}} \left(\sum_{j_1, \dots, j_{p+q}} u^{j_1 \cdots j_p}_{j_{p+1} \cdots j_{p+q}} \; p^{i_1}_{j_1} p^{i_2}_{j_2} \cdots\cdots p^{i_p}_{j_p} \; q^{j_{p+1}}_{i_{p+1}} \cdots q^{j_{p+q}}_{i_{p+q}} \right) f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_p} \otimes f^{i_{p+1}} \otimes \cdots \otimes f^{i_{p+q}}$$