Tensori.

Preliminari

1. Come produrre nuovi spazi vettoriali a partire da dati spazi $V_1, V_2, \dots$?

Ad esempio, se V, W sono due spazi vettoriali, si può costruire la loro "somma" prendendo lo spazio (prodotto cartesiano)

$$V \times W = \{ (v,w) \mid v \in V,\ w \in W \}$$

con somma $(v,w)+(v',w') = (v+v', w+w')$ e prodotto esterno $\alpha(v,w) = (\alpha v, \alpha w)$. La dimensione di $V \times W$ è la somma delle dimensioni di V e di W: se $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ è base di V, $B'=\{w_1,\dots,w_m\}$ è base di W, allora $(v_1,0),\dots,(v_n,0), (0,w_1),\dots,(0,w_m)$ è base di $V \times W$. In effetti, se $v = \sum \alpha_i v_i$ e $w = \sum \beta_j w_j$, allora $(v,w) = \sum_i \alpha_i (v_i,0) + \sum_j \beta_j (0,w_j)$.

A volte si usa la notazione $V \oplus W$ invece di $V \times W$, anche se questa notazione può confondere perché è quella comunemente usata per la somma diretta di due sottospazi V, W di uno stesso spazio U. In effetti, se V e W sono sottospazi di U che sono in somma diretta (cioè $V \cap W = \{0\}$) allora la loro somma vettoriale $V+W$ si denota con $V \oplus W$ ed è naturalmente isomorfa a $V \times W$, mandando $v+w \to (v,w)$. Però $V \times W$ si può definire in astratto e non richiede che V e W stiano nello stesso spazio vettoriale (e inoltre se $V, W \subset U$, ma $\dim(V \cap W) > 0$, allora $\dim(V+W) < \dim(V \times W)$).

Se $f: V \to V$, $g: W \to W$ sono endomorfismi, si può costruire un endomorfismo $f \times g: V \times W \to V \times W$, ponendo $f \times g((v,w)) = (f(v), g(w))$. Si verifica subito la linearità di $f \times g$. Se A è la matrice di f rispetto a $v_1,\dots,v_n$, B la matrice di g rispetto a $w_1,\dots,w_m$, allora la matrice di $f \times g$ rispetto alla base $(v_i,0),\dots,(0,w_j)$ è la matrice a blocchi diagonali $\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$. Quindi un endomorfismo $h \in \mathcal{L}(V \times W)$ è uguale a $f \times g$ per qualche $f \in \mathcal{L}(V)$, $g \in \mathcal{L}(W)$, se e solo se i sottospazi $V \times \{0\}$ e $\{0\} \times W$ sono h-invarianti. Gli endomorfismi del tipo $f \times g$ formano un sottospazio di $\mathcal{L}(V \times W)$

di dimensione n^2+m^2 (mentre $\dim \mathcal{L}(V\times W) = (n+m)^2$).

2. A partire da V, W, abbiamo trovato uno spazio vettoriale di dimensione uguale alla loro somma. Vediamo se si può costruire uno spazio che ha dimensione il prodotto. Si può partire dalle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ e trovare uno spazio vettoriale che abbia una base che sia in corrispondenza biunivoca con le coppie (v_i, w_j) (che sono nm).

Sia quindi U uno spazio vettoriale di dimensione nm, e sia u_{ij}, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$, una sua base (la indicizziamo con 2 indici, ma è comunque una base). La corrispondenza che manda $(v_i, w_j) \longrightarrow u_{ij}$ si estende a un'applicazione $\varphi: V\times W \longrightarrow U$:

$$\varphi\left(\sum_i \alpha_i v_i, \sum_j \beta_j w_j\right) \longrightarrow \sum_{ij} \alpha_i \beta_j u_{ij}$$

che è chiaramente bilineare. [attenzione: gli nm vettori $(v_i, w_j) \in V\times W$ non sono ovviamente linearmente indipendenti in $V\times W$, che ha dimensione $n+m$, a meno che n o $m=1$ (anche se $n=m=2$ i 4 vettori risultano dipendenti)].

<u>Lemma 1</u> $\{\varphi(v_i, w_j)\}$ è base di $U \Longrightarrow \{\varphi(v'_i, w'_j)\}$ è base di U, per qualunque altra base $\{v'_i\}$ di V e $\{w'_j\}$ di W.

<u>dim</u>

$$v'_i = \sum_h p_{hi} v_h \qquad w'_j = \sum_k q_{kj} w_k \implies \varphi(v'_i, w'_j) = \sum_{hk} p_{hi} q_{kj} u_{hk} \qquad (*)$$

Quindi:

$$\sum_{ij} \gamma_{ij} \varphi(v'_i, w'_j) = \sum_{ijhk} \gamma_{ij} p_{hi} q_{kj} u_{hk} = \sum_{hk}\left(\sum_{ij} \gamma_{ij} p_{hi} q_{kj}\right) u_{hk} = 0$$

$\Rightarrow P(\gamma_{ij})\,{}^tQ = 0$, dove $P=(p_{rs})$, $Q=(q_{tu})$ sono le matrici di cambiamento di base. Essendo P e Q di rango massimo, segue $(\gamma_{ij}) = (0)$ ∎

Def 1 Una coppia (U, φ) dove U è uno sp. vettoriale di dim nm e $\varphi : V \times W \to U$ è bilineare e $\varphi(v_i, w_j) = u_{ij}$ è una base di U per una coppia di basi $\{v_i\}$ di V e $\{w_j\}$ di W (e quindi per tutte le coppie di basi, per il lemma) si dice un PRODOTTO TENSORIALE di V e W.

Se (U', φ') è un altro prodotto tensoriale di V e W, l'applicazione lineare ψ che estende la corrispondenza $\varphi(v_i, w_j) \longrightarrow \varphi'(v_i, w_j)$ dà un isomorfismo tra U e U', t.c. $\psi\varphi(v,w) = \varphi'(v,w)$ $\forall v \in V$, $w \in W$. In questo senso quindi il prodotto tensoriale è unico.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\psi"] & & U' \\ & V \times W \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

Un modo semplice per definire la coppia (U, φ) è di fissare una base u_{ij} a 2 indici di U (e sarà $u_{ij} = \varphi(v_i, w_j)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$).

In questo modo i vettori $u \in U$ si scrivono come $u = \sum_{ij} \alpha_{ij} u_{ij}$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$.

Quindi le coordinate di u le pensiamo disposte in una matrice $n \times m$ (α_{ij}) piuttosto che in un vettore.

NOTAZIONE. Si potrà scrivere $V \otimes W$ invece di U, e $v \otimes w$ invece di $\varphi(v,w)$. In particolare, $u_{ij} = \varphi(v_i, w_j) = v_i \otimes w_j$ è la base di $V \otimes W$.

Un qualunque vettore $u \in U = V \otimes W$ si dirà un TENSORE.

Un generico tensore u si scriverà quindi, in termini della base $v_i \otimes w_j$, come

$$u = \sum_{ij} \alpha_{ij} u_{ij} = \sum_{ij} \alpha_{ij} v_i \otimes w_j, \qquad \alpha_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Vediamo come cambia questa espressione cambiando base in V e in W. Sia v'_i un'altra base di V, con $v_j=\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, v'_i$, e similmente sia w'_h un'altra base di W, con $w_k=\sum_{h=1}^{m} q_{hk}\, w'_h$. Allora:

$$v_j\otimes w_k=\Big(\sum_i p_{ij}v'_i\Big)\otimes\Big(\sum_h q_{hk}w'_h\Big)\overset{\text{per bilinearità}}{=}\sum_{ih} p_{ij}\,q_{hk}\; v'_i\otimes w'_h$$

e quindi
$$u=\sum_{jk}\alpha_{jk}\; v_j\otimes w_k=\sum_{jk}\alpha_{jk}\Big(\sum_{ih}p_{ij}\,q_{hk}\; v'_i\otimes w'_h\Big)=$$
$$=\sum_{ih}\Big(\sum_{jk}\alpha_{jk}\,p_{ij}\,q_{hk}\Big)v'_i\otimes w'_h=\sum_{ih}\alpha'_{ih}\; v'_i\otimes w'_h$$

cioè: $$\alpha'_{ih}=\sum_{jk}p_{ij}\,q_{hk}\,\alpha_{jk}\qquad\Big[\text{in termini matriciali: } (\alpha'_{ih})=P\,(\alpha_{jk})\,{}^tQ\Big]$$

In altri termini, la matrice $nm\times nm$ del cambiamento di base è data da

$$M=(p_{ij}\,q_{hk}),$$

con le righe indicizzate dalle coppie i,h e le colonne indicizzate dalle coppie j,k. Se si ordinano le coppie in modo lessicografico $[(1,1),\dots,(1,m),(2,1),\dots,(2,m),\dots,(n,1),\dots,(n,m)]$ allora

$$M=$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
p_{11}q_{11} & p_{11}q_{12}\cdots & p_{11}q_{1m} & p_{12}q_{11} & p_{12}q_{12}\cdots & p_{12}q_{1m} & \cdots & p_{1n}q_{11} & p_{1n}q_{12}\cdots & p_{1n}q_{1m}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
p_{11}q_{m1} & p_{11}q_{m2}\cdots & p_{11}q_{mm} & p_{12}q_{m1} & p_{12}q_{m2}\cdots & p_{12}q_{mm} & \cdots & p_{1n}q_{m1} & p_{1n}q_{m2}\cdots & p_{1n}q_{mm}\\
\hline
p_{21}q_{11} & p_{21}q_{12}\cdots & p_{21}q_{1m} & p_{22}q_{11} & p_{22}q_{12}\cdots & p_{22}q_{1m} & & p_{2n}q_{11} & p_{2n}q_{12}\cdots & p_{2n}q_{1m}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
p_{21}q_{m1} & p_{21}q_{m2}\cdots & p_{21}q_{mm} & p_{22}q_{m1} & p_{22}q_{m2}\cdots & p_{22}q_{mm} & \cdots & p_{2n}q_{m1} & p_{2n}q_{m2}\cdots & p_{2n}q_{mm}\\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
\hline
p_{n1}q_{11} & p_{n1}q_{12}\cdots & p_{n1}q_{1m} & p_{n2}q_{11} & p_{n2}q_{12}\cdots & p_{n2}q_{1m} & \cdots & p_{nn}q_{11} & p_{nn}q_{12}\cdots & p_{nn}q_{1m}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
p_{n1}q_{m1} & p_{n1}q_{m2}\cdots & p_{n1}q_{mm} & p_{n2}q_{m1} & p_{n2}q_{m2}\cdots & p_{n2}q_{mm} & \cdots & p_{nn}q_{m1} & p_{nn}q_{m2}\cdots & p_{nn}q_{mm}
\end{array}\right]=$$

$$
= \begin{bmatrix} p_{11}Q & p_{12}Q & \cdots & p_{n1}Q \\ p_{21}Q & p_{22}Q & & p_{n2}Q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1}Q & p_{n2}Q & & p_{nn}Q \end{bmatrix}
$$

La matrice $nm \times nm$ così ottenuta si dice <u>prodotto di Kronecker</u> delle matrici P e Q e si indica anche con $P \otimes Q$.

Dipende dalla scelta dell'ordinamento, ma ha la proprietà:

P, Q invertibili $\Rightarrow P \otimes Q$ è invertibile e $(P \otimes Q)^{-1} = P^{-1} \otimes Q^{-1}$.
(esercizio).

(rincontreremo il prodotto di Kronecker tra poco).

Un tensore u che stia nell'immagine dell'applicazione bilineare φ, cioè si possa scrivere $u = v \otimes w$, si dirà TENSORE DECOMPONIBILE, altrimenti si dirà INDECOMPONIBILE. Caratterizziamo i tensori decomponibili.

Teorema 1. $u = \sum \alpha_{ij} u_{ij}$ è decomponibile $\Leftrightarrow$ $rk(\alpha_{ij}) \le 1$.

dim. $\Rightarrow$ Se $u = v \otimes w$, $v = \sum \alpha_i v_i$, $w = \sum \beta_j w_j$, allora per bilinearità $u = (\sum \alpha_i v_i) \otimes (\sum \beta_j w_j) = \sum_{ij} \alpha_i \beta_j \, v_i \otimes w_j = \sum_{ij} \alpha_i \beta_j \, u_{ij}$. È immediato vedere che $rk(\alpha_i \beta_j) \le 1$ (tutte le righe sono proporzionali).

$\Leftarrow$ Se $rk(\alpha_{ij}) = 0$ $u = 0$, quindi $u = 0 \otimes 0$. Sia $rk(\alpha_{ij}) = 1$. Allora una riga, ad es. la 1ª è $\ne 0$, e le altre risultano multiple di essa. Quindi $\alpha_{ij} = \alpha_i \alpha_{1j}$. Ponendo $\beta_j = \alpha_{1j}$, si ha $\alpha_{ij} = \alpha_i \beta_j$, che dà
$u = (\sum \alpha_i v_i) \otimes (\sum \beta_j w_j)$ ∎

Oss 1. Se $u = \sum \alpha_{ij} u_{ij}$, il rango $rk(\alpha_{ij})$ vale al massimo $\min\{n, m\} = N$. Poiché ogni matrice $n \times m$ è somma di al max N matrici di rango 1, si ha per il teorema 1 che ogni tensore u si scrive come somma di al più N tensori decomponibili.
Si potrebbe definire il rango di u come il min h t.c. $0 \le h \le N$ e

$$u = v^{(1)} \otimes w^{(1)} + v^{(2)} \otimes w^{(2)} + \dots + v^{(h)} \otimes w^{(h)} \qquad (*)$$

per cui un tensore decomponibile ha rango 1.
Si ha:

Proposizione 1 $u = \sum \alpha_{ij} u_{ij}$ ha rango $h \Leftrightarrow rk(\alpha_{ij}) = h$.

Deriva subito da:

Lemma 2. Una matrice A di tipo $n \times m$ ha rango $k \Leftrightarrow$ è somma di k matrici di rango 1, e non meno.

dim lemma ($\Rightarrow$) Poichè

$$rk(M+N) \leq rk\,M + rk\,N \qquad (1)$$

chiaramente A non è somma di $< k$ matrici di rango 1. Per fissare le idee, supponiamo che le prime k righe $A_1, \dots, A_k$ di A siano linearmente indipendenti. Allora $\forall\, i > k \quad A_i = \sum_{r=1}^{k} \lambda_{ir} A_r$.

Sia $M^{(r)} \in \mathcal{M}_{n,m}$ la matrice le cui prime k righe sono nulle, ad eccezione della r-sima che è A_r; le successive righe valgano $\lambda_{k+1,r} A_r$, $\dots, \lambda_{n,r} A_r$:

$$M^{(r)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \lambda_{k+1,r} A_r \\ \vdots \\ \lambda_{n,r} A_r \end{bmatrix}$$

È chiaro che $rk\,M^{(r)} = 1$ e $A = \sum_{r=1}^{n} M^{(r)}$.

($\Leftarrow$) $rk(a_{ij}) \leq k$ per (1). Non può essere $rk(a_{ij}) < k$ per la prima parte, altrimenti (a_{ij}) sarebbe somma di $< k$ matrici di rango 1. ∎

Oss. 2 Se $u = \sum a_{ij}\, v_i \otimes w_j$, se cambiamo base $v_i = \sum p_{ri} v'_r$, $w_j = \sum q_{sj} w'_s$, si ottiene (come nella dimostrazione del lemma 1)

$$u = \sum_{ijrs} a_{ij}\, p_{ri}\, q_{sj}\, v'_r \otimes w'_s = \sum_{rs} \left(\sum_{ij} p_{ri}\, a_{ij}\, q_{sj} \right) v'_r \otimes w'_s = \sum_{rs} \beta_{rs}\, v'_r \otimes w'_s$$

cioè

$$(\beta_{rs}) = P\,(a_{ij})\,{}^tQ \qquad (2)$$

Quindi il rango dei coefficienti non cambia: dipende solo da U, φ. ∎

<u>Esempio 1</u>. Siano V e W due copie di $\mathbb{R}^2$, con basi canoniche v_1, v_2 e w_1, w_2 rispettivamente. Uno spazio U di dimensione 4 con base a 2 indici $\le i,j \le 2$ è ad esempio lo spazio delle matrici 2×2, con base u_{ij} data dalla matrice avente 1 in posizione i,j, e uno 0 altrove. L'applicazione $\varphi : V\times W \to U$ estende $\varphi(v_i, w_j) = u_{ij}$, ed è data in coordinate da

$$\varphi\left(\sum \alpha_i v_i, \sum \beta_j v_j\right) = \sum \alpha_i \beta_j u_{ij}$$

1

quindi è appunto la matrice $(\alpha_i \beta_j)$. I tensori decomponibili sono proprio le matrici di rango 1 (e quelli 0-decomponibili le matrici di rango 2, che sono in questo caso tutti i tensori indecomponibili).

Analogamente, se $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$, con basi canoniche $\{v_i\}$, $\{w_j\}$ rispettivamente, si può prendere come $V\otimes W$ lo spazio U delle matrici $n\times m$, con base canonica u_{ij}.

Siano ora $f: V\to V$, $g: W \to W$ trasformazioni lineari, e sia $(U = V\otimes W, \varphi)$ un prodotto tensoriale. Indichiamo con

$$f\otimes g : V\otimes W \longrightarrow V\otimes W$$

la trasformazione lineare definita estendendo linearmente la corrispondenza

$$v\otimes w \longrightarrow f(v)\otimes g(w)$$

definita sui tensori decomponibili. In termini di basi $\{v_i\}$, $\{w_j\}$ tale corrispondenza si scrive, se $v = \sum \alpha_i v_i$, $w = \sum \beta_j w_j$:

$$\sum \alpha_i \beta_j \, v_i \otimes w_j \longrightarrow \left(\sum \alpha_i f(v_i)\right) \otimes \sum \beta_j g(w_j) = \sum_{ij} \alpha_i \beta_j f(v_i) \otimes g(w_j)$$

e quindi $f\otimes g$ è l'applicazione lineare che estende unicamente
$v_i\otimes w_j \to f(v_i)\otimes g(w_j)$. Se $A=(a_{rs})$; $B=(b_{r's'})$ sono le matrici di f
e g rispetto alle date basi, allora

$$f(v_i)\otimes g(w_j) = \Big(\sum_r a_{ri}\, v_r\Big)\otimes\Big(\sum_s b_{sj}\, w_s\Big) = \sum_{rs} a_{ri}\, b_{sj}\; v_r\otimes w_s$$

Ordinando le coppie di indici in ordine lessicografico, la matrice di
$f\otimes g$ risulta: $(A\otimes B)_{rs,ij} = a_{ri}\, b_{sj}$

$$(A\otimes B) = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \cdots & a_{11}b_{1m} & a_{12}b_{11} & \cdots & a_{12}b_{1m} & \cdots & a_{1n}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \\
a_{11}b_{m1} & a_{11}b_{m2} \cdots & a_{11}b_{mm} & a_{12}b_{m1} & \cdots & a_{12}b_{mm} & & a_{1n}b_{m1} & \cdots & a_{1n}b_{mm} \\
a_{21}b_{11} & \cdots & a_{21}b_{1m} & a_{22}b_{11} & \cdots & a_{22}b_{1m} & & a_{2n}b_{11} & \cdots & a_{2n}b_{1m} \\
\vdots & & & & & & & & & \\
a_{21}b_{m1} & & a_{21}b_{mm} & a_{22}b_{m1} & \cdots & a_{22}b_{mm} & & a_{2n}b_{m1} & \cdots & a_{2n}b_{mm} \\
\vdots & & & & & & & & & \\
\hline
a_{m1}b_{11} & & a_{m1}b_{1m} & a_{m2}b_{11} & \cdots & a_{m2}b_{1m} & & a_{mn}b_{11} & \cdots & a_{mn}b_{1m} \\
\vdots & & & \vdots & & & & & & \\
a_{m1}b_{m1} & & a_{m1}b_{mm} & a_{m2}b_{m1} & \cdots & a_{m2}b_{mm} & & a_{mn}b_{m1} & \cdots & a_{mn}b_{mm}
\end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c}
a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\
\hline
a_{21}B & a_{22}B & & a_{2n}B \\
\vdots & & & \\
\hline
a_{m1}B & a_{m2}B & & a_{mn}B
\end{array}\right]$$

(prodotto di Kronecker delle matrici A e B)

<u>Oss 3</u> 1) Se V, W sono spazi euclidei rispetto a prodotti scalari φ_V, φ_W,
allora $V\otimes W$ è uno spazio euclideo con prodotto $\varphi_{V\otimes W}$ che sui tensori
decomponibili è definito come:

$$\psi_{V\otimes W}(v\otimes w, v'\otimes w') = \psi_V(v,v')\,\psi_W(w,w')$$

Se $v = \sum \alpha_i v_i$, $w = \sum \beta_j w_j$, $v' = \sum \alpha'_r v_r$, $w' = \sum \beta'_s w_s$, si ha:

$$\psi_{V\otimes W}\Big(\sum \alpha_i\beta_j\, v_i\otimes w_j, \sum \alpha'_r \beta'_s\, v_r\otimes w_s\Big) = \sum \alpha_i\beta_j\alpha'_r\beta'_s\, \psi_{V\otimes W}(v_i\otimes w_j, v_r\otimes w_s)$$

$$= \sum \alpha_i\beta_j\alpha'_r\beta'_s\, \psi_V(v_i,v_r)\,\psi_W(w_j,w_s) =$$

$$= \psi_V\Big(\sum \alpha_i v_i, \sum \alpha'_r v_r\Big)\,\psi_W\Big(\sum \beta_j w_j, \sum \beta'_s w_s\Big)$$

e quindi in generale

$$\psi_{V\otimes W}\Big(\sum \alpha_{ij}\, v_i\otimes w_j, \sum \alpha'_{rs}\, v_r\otimes w_s\Big) = \sum \alpha_{ij}\alpha'_{rs}\, \psi_V(v_i,v_r)\,\psi_W(w_j,w_s).$$

Se $\{v_i\}$ e $\{w_j\}$ sono basi ortonormali, allora $\{v_i\otimes w_j\}$ è una base ortonormale per $\psi_{V\otimes W}$ [in tal caso: $\psi_{V\otimes W}\big(\sum \alpha_{ij}\, v_i\otimes w_j, \sum \alpha'_{rs}\, v_r\otimes w_s\big) = \sum_{ij} \alpha_{ij}\alpha'_{ij}$]

Se M_V e M_W sono le matrici di ψ_V e ψ_W rispetto alle date basi, allora da:

$$\psi_{V\otimes W}(v_i\otimes w_j, v_r\otimes w_s) = \psi_V(v_i,v_r)\,\psi_W(w_j,w_s)$$

segue

$$(M_{V\otimes W})_{ij,rs} = (M_V)_{ir}\,(M_W)_{js}$$

cioè lo stesso prodotto di Kronecker.

Esercizi 1) A, B simmetriche $\overset{?}{\Rightarrow}$ il loro prodotto di Kronecker è una matrice simmetrica. Se A e B sono ortogonali $\overset{?}{\Rightarrow}$ il loro prodotto di Kronecker è ortogonale.

2) Stesso esercizio ma con f, g operatori simmetrici (ortogonali) rispetto a ψ_V, ψ_W $\overset{?}{\Rightarrow}$ $f\otimes g$ è simmetrico (ortogonale) rispetto a $\psi_{V\otimes W}$.

NOTA. L'applicazione bilineare $\varphi : V \times W \to U$ che definisce il prodotto tensoriale non è ovviamente iniettiva. Per bilinearità si hanno le relazioni

$\varphi(v,w) = v \otimes w$) $\quad 0 \otimes w = v \otimes 0 = 0, \quad \alpha(v \otimes w) = (\alpha v) \otimes w = v \otimes (\alpha w),$

(e in particolare $\quad v \otimes w = (\alpha v) \otimes (\alpha^{-1} w) \quad , \forall \alpha \neq 0$).

Vedere in quanti modi un certo tensore decomponibile u si può scrivere come $u = v \otimes w$ equivale a vedere in quanti modi una data matrice (α_{ij}) di rango 1 si può scrivere nella forma $a_{ij} = a_i \beta_j$.

Esercizio. Sia $A = (\alpha_{ij}) \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ di rango 1, sia $\varphi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \to M_{n,m}$ $\varphi(x,y) = (x_i y_j)$. Studiare $\varphi^{-1}(A)$.