- Teoria di Morse discreta algebrica [Kozlov, note]
- Fibrati universali, spazio classificante BG di un gruppo topologico G, caso di fibrati vettoriali e della Grassmanniana, teorema di classificazione. [Hatcher, VB]
- Spazi $K(G,1)$ e costruzione omotopica della coomologia [4.3 Hatcher]

Ω-spettro: successione di CW-complessi $K_1, K_2, \dots$ e di equivalenze omotopiche deboli $K_n \to \Omega K_{n+1}$, $\forall n$.

<u>Teo.</u> $\{K_n\}$ Ω-spettro $\Rightarrow$ $X \to \langle X, K_n \rangle$, $n \in \mathbb{Z}$, è una teoria coomologica (ridotta) sui CW-complessi

e teorema di rappresentabilità di Brown [Hatcher § 4.E]: viceversa

- successioni spettrali e applicazioni [Hatcher, ...]

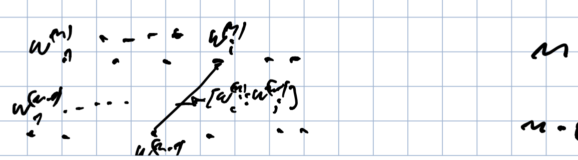
A anello comm. con 1, $C_* : \ \to C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}$ complesso di A-moduli liberi. In C_n fissiamo base

$\Omega_n \subset C_n \qquad a \in C_n \qquad a = \sum x_i w_i^{(n)}$

$C_{n-1} \ni \partial a = \sum y_j w_j^{(n-1)}$.

$$\partial w_i^{(n)} = \sum \underbrace{[w_i^{(n)} : w_j^{(n-1)}]}_{\in A} w_j^{(n-1)}$$

diagramma di Hasse:



$\Omega = \bigcup \Omega_n$ part

Matching: $M \subset \Omega \times \Omega$ $\quad w_j^{(n-1)} < w_i^{(n)}$

se $[w_j^{(n-1)} : w_i^{(n)}]$ è invertibile in A.

aciclicità: stesso concetto.

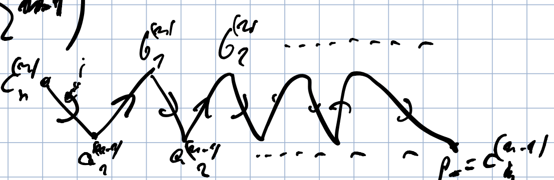
Il complesso di Morse: C_*, Ω $\qquad \Gamma_M$

$$\to C^M_{n+1} \xrightarrow{\partial^M_{n+1}} C^M_n \xrightarrow{\partial^M_n} C^M_{n-1} \to \dots$$

$C^M_n = \bigoplus_k A\, c_k^{(n)}$ $\qquad c_k^n \in \Omega_n$ critico

$$\partial^M_n(c^{(n)}) = \sum_p w(p)\, p_*$$

p cammino alternato in Γ_M che inizia con $c^{(n)}$ e finisce con $p_* \in Crit(\Omega^{n-1})$



n = n° di lati di M

$$w(p) = (-1)^n \frac{[a_1^{(n-1)} : c_k^{(n)}][a_2^{(n-1)} : b_1^{(n)}]\cdots}{[a_1^{(n-1)} : b_1^{(n)}][a_2^{(n-1)} : b_2^{(n)}]\cdots}$$

Teo C_*, Ω come sopra, M aciclico. Allora:

$$C_* \cong C^M_* \oplus T_*$$

T_* è aciclico e $T_* \cong \bigoplus_{(a,b)\in M} [0 \to Ab \to Aa \to 0]$

$$\begin{array}{c} F \hookrightarrow E \\ \downarrow \\ B \end{array} \qquad F \cong G \qquad \text{fibrato principale}$$

fibrato universale
$$\begin{array}{c} G \hookrightarrow EG \\ \downarrow \\ BG \end{array}$$
BG : spazio classificante del gruppo G

ogni fibrato principale su un CW-complesso X è "classificato" da una mappa $X \xrightarrow{f} BG$ (a meno di omotopia)

$$\begin{tikzcd} E \cong f^*(EG) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & EG \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"] & BG \end{tikzcd}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{classi di isomorfismo di fibrati principali} \\ \text{con gruppo } G \text{ su } X \end{array} \right\} \longleftrightarrow [X, BG]$$

fibrati vettoriali : $G = GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$.

BG : Grassmanniana n-piani in $\mathbb{R}^\infty$ o $\mathbb{C}^\infty$

$K(G,n)$ $\qquad \pi_n = G \qquad \pi_k = 0, \; k \neq n$

$\exists$ isomorfismo $\qquad H^n(X;G) = [X, K(G,n)]$

$\langle\langle X, K(G,n) \rangle\rangle$ con punto base

$f : X \to K(G,n)$

$f^* : \underset{\alpha}{H^n(K(G,n), G)} \to H^n(X;G)$

me le vede che $X \to \langle X, K(G,n)\rangle$ X CW-complesso soddisfa gli assiomi di una teoria coomologica sui CW-complessi.

<u>Ω-spettro</u>: una successione di CW-complessi $K_1, K_2, \dots$ t.c. $\exists$ $K_n \to \Omega K_{n+1}$ equivalenza omotopica debole (ΩX: spazio dei loop su X)

Es: $K_n = K(G,n)$ è un Ω-spettro.

- $\{K_n\}$ è un Ω-spettro $\Rightarrow$ $X \to \langle X, K_n\rangle$ dà teoria coomologica generalizzata sui CW-complessi

---

- Viceversa: teorema di rappresentabilità di Brown: ad ogni teoria coomologica (ridotta) $X \to h^n(X)$ è associato un Ω-spettro $\{K_n\}$ t.c. $h^n(X) = \langle X, K_n\rangle$.

<u>successioni spettrali</u>

$$\begin{array}{ccccccc}
C_\cdot & \to & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \to & C_{n-2} \to \cdots \\
 & & \cup & & \cup & & \cup \\
 & \to & F_K C_n & \to & F_n C_{n-1} & \to & F_n C_{n-2} \to \cdots \\
 & & \cup & & \cup & & \cup \\
 & \to & F_{n-1} C_n & \to & F_{n-1} C_{n-1} & \to & F_{n-1} C_{n-2} \to \cdots
\end{array}$$

F_p induce una filtrazione sull'omologia di C_*:

$$F_p H_*(C) = \operatorname{im}\left[H_*(F_p C_*) \to H_*(C_*)\right]$$

F_p è convergente $\Rightarrow \bigcup_p F_p H_* C = H_* C$

F_* è limitata di sotto se $\forall s \ \exists p(s)$ t.c. $F_{p(s)} C_s = 0$

Teo. F_p filtrazione convergente limitata di sotto su C_*, ∂_*. Allora $\exists$ successione spettrale $\{E^n_{pq}\}$, $n \geq 1$, convergente, con

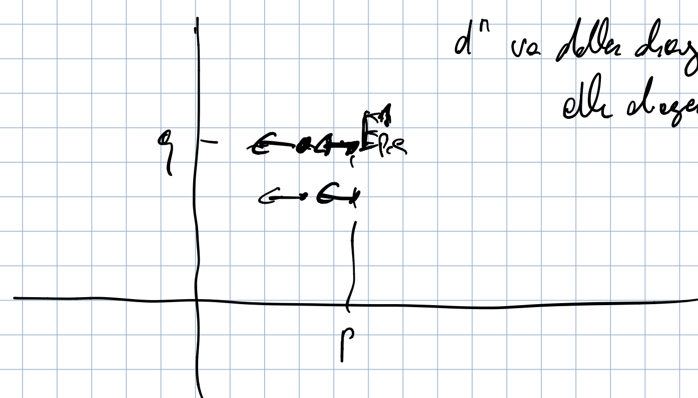
$$E^1_{pq} = H_{p+q}(F_p C_* / F_{p-1} C_*)$$

e $d^1 : E^1_{pq} \to E^1_{p-1,q}$ è il bordo nella succ esatta della tripla $(F_p C_*, F_{p-1} C_*, F_{p-2} C_*)$

E^n_{pq} - modulo bigraduato

pagina n-esima E^n_{pq} $\qquad d^n : E^n_{pq} \to E^n_{p-n,q+n-1}$

$(d)^2 = 0$



d^n va dalla diagonale $p+q=k$ alla diagonale $p+q=k-1$

$d^1 : E^1_{pq} \to E^1_{p-1,q}$ $\qquad d^2 : E^2_{pq} \to E^2_{p-2,q+1}$

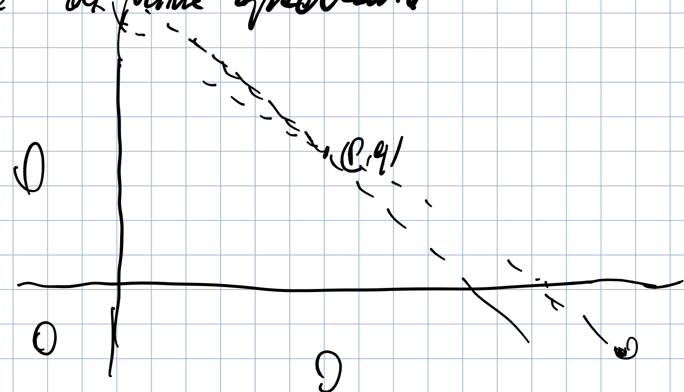
$$E^{r+1}_{p,q} = \frac{\ker d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,\, q+r-1}}{\operatorname{Im} d^r_{p+r,\, q-r+1} : E^r_{p+r,\, q-r+1} \to E^r_{p,q}}$$

Convergente: $\forall\, p,q$, $\exists\, r(p,q)$ $\quad E^{r+n}_{p,q} \cong E^r_{p,q} \quad n>0$

i differenziali d^r che partono e arrivano su (p,q) sono 0.

$$E^{(\infty)}_{p,q} = E^r_{p,q} \qquad r \gg 0.$$

Es: $E^r_{p,q}$ è di primo quadrante



$$E^\infty = G\, H_*(C_*) \qquad\qquad E^\infty_{p,q} = \frac{F_p\, H_{p+q}(C_*)}{F_{p-1}\, H_{p+q}(C_*)}$$

$\underline{\text{n}}$ X sp. top. filtrato $X_0 \subset X_1 \subset \cdots X_n \subset \cdots X$

omologia singolare di X:

$$\begin{array}{ccc} \to C_q(X) \to & C_{q-1}(X) \to \cdots \\ \cup & \cup \\ \to C_q(X_n) \to & C_{q-1}(X_n) \to \cdots \end{array}$$

fibrato $\begin{array}{c} F \\ \downarrow \pi \\ B \end{array}$ B CW-complesso connesso.

B_p p-scheletro di B, filtriamo E $E_p = \pi^{-1}(B_p)$

Il teorema di prima: $\exists$ succ. spettrale $E^1_{p,q} = H_{p+q}(E_p, E_{p-1})$

$d_1 : H_{p+q}(E_p, E_{p-1}) \to H_{p+q-1}(E_{p-1}, E_{p-2})$

è il bordo della tripla (E_p, E_{p-1}, E_{p-2})

e $E^\infty_{p,q} = G\, H_*(E)$.

$H_{p+q}(E_p, E_{p-1})$ si comporta come omologia cellulare:

- $B_p = B_{p-1} \bigcup_\alpha e^p_\alpha$, allora:

$$H_n(E_p, E_{p-1}) \cong \bigoplus_\alpha H_n(\pi^{-1}(e_\alpha), \pi^{-1}(\dot{e}_\alpha))$$

- assumiamo che le funzioni caratteristiche φ_α siano chiuse. Allora e_α è contrattile e $\Rightarrow$ $\pi : \pi^{-1}(e_\alpha) \to e_\alpha$ è banale

$\pi^{-1}(e_\alpha) = e_\alpha \times F$

$$H_n(\pi^{-1}(e_\alpha), \pi^{-1}(\dot e_\alpha)) \cong H_n((e_\alpha, \dot e_\alpha) \times F) \cong$$

$$\bigoplus_{r+s=n} H_r(e^p_\alpha, \dot e^p_\alpha) \otimes H_s(F) \cong H_p(e^p_\alpha, \dot e^p_\alpha) \otimes H_q(F)$$

$$H_{p+q}(E_p, E_{p-1}) \cong H_p(B_p, B_{p-1}) \otimes H_q(F)$$

- Se l'azione di $\pi_1(B)$ su $H_q(F)$ è banale, allora

$$d^1 : H_{p+q}(E_p, E_{p-1}) \to H_{p+q-1}(E_{p-1}, E_{p-2})$$

corrisponde a

$$\partial : H_p(B_p, B_{p-1}; H_q(F)) \longrightarrow H_{p-1}(B_{p-1}, B_{p-2}; H_q(F))$$

- - - - - - - - - - - - -

- (succ. spettrale di Serre): $\pi : E \to B$, $\pi_1(B)$ agisce banalmente su $H_*(F)$, allora

$$E^2_{p,q} = H_p(B; H_q(F))$$

- - - - - - - - - - - - -

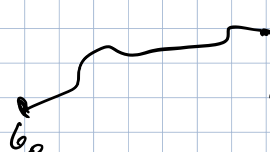
calcolo omologia di $K(\pi,1)$, ...

$B = K(\mathbb{Z}, 2)$ $\qquad \pi_2 = \mathbb{Z}$, $\pi_k = 0$, $k \neq 2$.

$P = PB$ spazio di cammini (con punto base $b_0 \in B$)

P contrattile

$P \to B \qquad \gamma \mapsto \gamma(1)$



$\gamma(0) = b_0$

$F_{b_0} = \Omega B$

$\Omega B = K(\mathbb{Z},1) \simeq S^1$ $\qquad\qquad$ $\pi_n(\Omega X) = \pi_{n+1}(X)$

$$E^2_{pq} = H_p(\underset{B}{K(\mathbb{Z},2)}; H_q(S^1)) \qquad \neq 0 \text{ solo se } q = 0,1$$

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & 0 & & & & & & & \\
1 & \mathbb{Z} & H_1B & H_2B & H_3B & H_4B & H_5B & H_6B & \\
0 & \mathbb{Z} & H_1B & H_2B & H_3B & H_4B & H_5B & H_6B & \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots
\end{array}$$

$E^3 = E^\infty = \mathrm{Gr}\, H_*(P)$ $\qquad$ P contraibile

$\Rightarrow$ $H_1B = 0$ $\quad$ $H_2B = \mathbb{Z}$, $\quad H_3B = 0$, $\quad H_4B = \mathbb{Z}$,

....