$\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$. Strati di $\mathcal{S} = \{F\}$ $\quad F$ <u>faccetta</u>

F^n $\quad n = \mathrm{codim}\, F \qquad |\ | : \mathcal{S} \to L(\mathcal{Q}) : F^n \mapsto |F^n|$.

$\mathcal{S}$ $\prec$; $F \prec G \iff \mathrm{cl}(F) \supset G$, $\quad |\ |$ conserva l'ordine.

<u>Def.</u> 1) $\forall X \in L(\mathcal{Q})$, denotiamo con $\mathcal{S}_X$ (risp. $\mathcal{S}^X$) la stratificazione di $V = \mathbb{R}^n$ (risp. X) indotta da $\mathcal{Q}_X$ (risp. $\mathcal{Q}^X$).
Gli elementi minimali di $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}_X$, $\mathcal{S}^X$) sono le camere di $\mathcal{Q}$ in V (risp. le camere di $\mathcal{Q}_X$ in V, risp. le camere di $\mathcal{Q}^X$ in X).
$\max \mathcal{S} = \{0\}$ ($\mathcal{Q}$ essenziale), $\max \mathcal{S}_X = X$ ($\mathcal{Q}_X$ non è essenziale)
$\max \mathcal{S}^X = \{0\}$.

<u>Lemma</u>. Fissiamo $F \in \mathcal{S}$. C'è una corrispondenza biunivoca tra le $G \in \mathcal{S}$ t.c. $G \prec F$, e $G' \in \mathcal{S}_{|F|}$, data, prendendo per $G \in \mathcal{S}$, l'unico $G' \in \mathcal{S}_{|F|}$ t.c. $G \subset G'$ ($\mathrm{codim}\, G = \mathrm{codim}\, G'$).

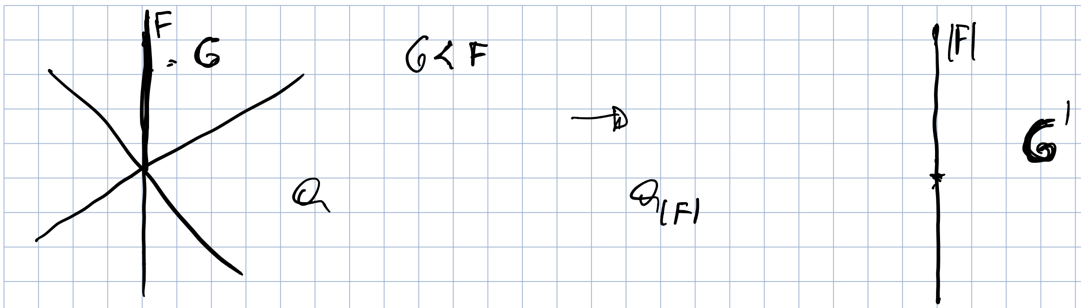
<u>dim.</u> $G \prec F \Rightarrow |G| \supset |F|$ tutti gli iperpiani che contengono G contengono anche F, $\mathcal{Q}_{|G|} \subset \mathcal{Q}_{|F|}$, e nessun iperpiano separa G da F. Quindi

$$G = \bigcap_{H \in \mathcal{Q}_{|G|}} H \cap \bigcap_{H \in \mathcal{Q}_{|F|} \setminus \mathcal{Q}_{|G|}} H(G) \cap \bigcap_{H \notin \mathcal{Q}_{|F|}} H(G)$$

si prende

$$G' = \bigcap_{H \in \mathcal{Q}_{|G|}} H \cap \bigcap_{H \in \mathcal{Q}_{|F|} \setminus \mathcal{Q}_{|G|}} H(G)$$

$\square$



Def 1) $\mathcal{P}, \preceq$ poset, $a \in \mathcal{P}$ $\quad \mathcal{P}^{\preceq a} = \{ b \in \mathcal{P} \mid b \preceq a \}$.

$$\pi_F : \mathcal{S}^{\preceq F} \longrightarrow \mathcal{S}_{|F|} \quad \text{biezione.}$$

2) posso estendere π_F a tutto $\mathcal{S}$: $\pi_F(G) = G'$, con $G' \in \mathcal{S}_{|F|}$ t.c. $G \subset G'$.

oss 1). Se $F = C$, $\mathcal{Q}_{|F|} = \emptyset$, $\mathcal{S}_{|F|} = V$
e $G \prec F \Rightarrow G = F$ e in questo caso $\pi_F(G) = V$.

2) $G \prec F \Rightarrow |G| = |\pi_F(G)|$.

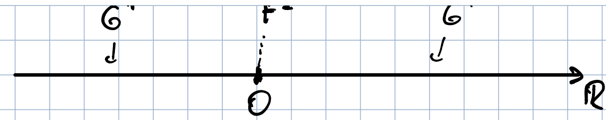
3) $F \prec F'$, $G \prec F' \Rightarrow \pi_F(\pi_{F'}(G)) = \pi_F(G)$ (esercizio).

$\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ arrangiamento, $H \in \mathcal{Q}$ $\quad H_\mathbb{C}$ complessificato $\subseteq \mathbb{C}^n$.
$\mathcal{Q}_\mathbb{C} \subset \mathbb{C}^n$ arrangiamento complessificato. $\quad \mathcal{M}(\mathcal{Q}_\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{Q}} H_\mathbb{C}$
Prendiamo una coppia

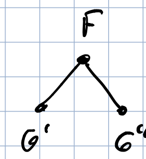
$$G \prec F \qquad G, F \in \mathcal{S} \qquad \text{definiamo}$$

$$s(G \prec F) = \{ x + iy \in \mathbb{C}^n \mid x \in F, \, y \in \pi_F(G) \}$$

$\mathcal{Q} = \{0\} \subset \mathbb{R} \qquad \mathcal{Q}_\mathbb{C} = \{0\} \subset \mathbb{C}$

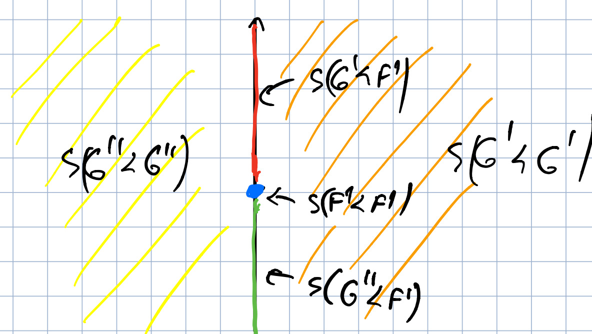


$$\mathcal{S} = \{ \underset{\{x=0\}}{\{0\}},\ \{x>0\},\ \{x<0\} \} \subset \mathbb{R}$$



<u>def</u> $\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \{ s(G<F) \mid G \leq F,\ G, F \in \mathcal{S} \}$

<u>esempio</u> $\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \{ \underset{\{0\}}{s(F'<F')},\ \underset{\{(0,y>0)\}}{s(G'<F')},\ \underset{\{(0,y)\mid y<0\}}{s(G''<F')},\ \underset{\{x>0\}}{s(G'<G')},\ \underset{\{x<0\}}{s(G''<G'')} \}$



<u>Lemma</u> Sia $s(G^h < F^k) \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$. Allora:

- se $h>0$ $\quad s(G^h < F^h) \subset H_{\mathbb{C}}, \quad \forall H \in \mathcal{A}_{|G|}$
- se $h=0$ (cioè $G=C$ una camera) allora
$$s(C<F^k) \subset \mathcal{M}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})$$

<u>dim.</u> Nella definizione: se $h>0$, $x \in F^k \subset |G|$, $y \in \mu_F(G) \subset |G|$. Quindi $z = x+iy$ è contenuto in ogni iperpiano $H_{\mathbb{C}}$ t.c. $G \subset H$.
Se $h=0$, $\forall x \in F$, gli iperpiani che contengono x sono esattamente quelli di $\mathcal{A}_{|F|}$. $y \in$ in una camera $(\mu_F(C))$ di $\mathcal{A}_F$,

quindi $y \notin$ iperpiani di $Q_{(F)}$, cioè x e y non stanno in stessi iperpiani. $\blacksquare$

$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \bigcup_{G<F} s(G<F)$ è una stratificazione da convessi (aperti nella chiusura) di $\mathbb{C}^n$ t.c.

$$\bigcup_{\substack{G<F \\ \operatorname{codim} G > 0}} s(G<F) \quad \text{stratifica} \quad \bigcup_{H \in Q} H_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{c} = \bigcup_{\substack{C<F \\ C \text{ camera}}} s(C<F) \quad \text{stratifica} \quad \mathcal{M}(Q_{\mathbb{C}})$$

def. Possiamo introdurre una relazione d'ordine in $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ ponendo

$$s(G<F) < s(G'<F') \iff cl(s(G<F)) \supset s(G'<F')$$

Lemma Si ha: $s(G<F) < s(G'<F') \iff$

$$\iff \underset{\text{in } \mathcal{S}}{F < F'} \quad e \quad \underset{\text{in } \mathcal{S}_{(F)}}{\mu_F(G) < \mu_F(G')}$$

dim $cl(s(G<F)) \supset s(G'<F')$. Allora avere $F \supset F'$, cioè $F < F'$. Inoltre $cl(\mu_F(G)) \supset \mu_{F'}(G') \Rightarrow cl(\mu_F(G)) \supset \mu_F(G')$ e è il più piccolo
chiuso in $\mathcal{S}_{(F)}$ che contiene $\mu_{F'}(G')$. ■

Corollario. Se $G = C$, $G' = C'$ sono camere allora

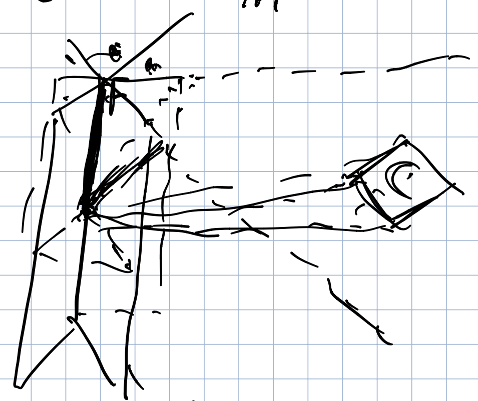
$$s(C<F) < s(C'<F') \iff F < F' \text{ e } \mu_F(C) = \mu_F(C')$$

Def. Data $C \in \operatorname{Cam}(Q)$, $F \in \mathcal{S}$, indichiamo con

$$C.F \in \operatorname{Cam}(Q)$$

l'unica camera $<F$ t.c. $\mu_F(C) = \mu_F(C.F)$

$C.F < F$ è l'unica camera in $\mathcal{S}$ che è contenuta nella stessa camera di C in $\mathcal{A}_{|F|}$



oss. Introduciamo una "distanza" tra camere: $dist(C, C') =$ = min. lunghezza di una galleria che collega C, C' = n° di iperpiani che separano C, C'. $C.F =$ l'unica camera $< F$ di distanza minima da C.

Fissiamo $s(C < F)$. $s(G < F') < s(C < F) \iff$
$\iff F < F'$, $G = C.F'$

$pr_{\mathbb{R}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n : x + iy \to x$

oss $pr_{\mathbb{R}}(s(G < F)) = F$ e $pr_{\mathbb{R}}$ conserva l'ordine

oss $s(C < F)$; $s(G' < F') < s(C < F) \iff F < F'$, $G = C.F'$
$\Rightarrow G$ è una camera, cioè $s(G < F') \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{c}$.

Quindi $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{\leq s(C < F)} \subset \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{c}$

Lemma. $pr_{\mathbb{R}}$ dà un isomorfismo di posets tra $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{\leq s(C < F)} \cong \mathcal{S}^{\leq F}$

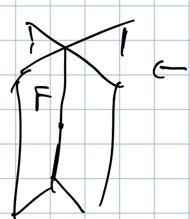
dim. Infatti, $\forall F' < F$ c'è un unico $s(C F' < F') < s(C < F)$ e si ha $s(C.F' < F') < s(C.F'' < F'')$ (con $F', F'' < F$) $\iff$

$F' < F''$ e $C.F' = (C.F'').F'$ che è sempre vero
$\Leftarrow)$ $F' < F''$ $\square$

def. Dato un poset $\mathcal{P}, <$, il <u>complesso dell'ordine</u> $\Delta(\mathcal{P})$ è il complesso simpliciale avente come q-simplessi le $(q+1)$-catene di $\mathcal{P}$. ($c = (a_0 < a_1 < \dots < a_q)$)

<u>Teorema</u> $\mathcal{S}^{\leq F} \overset{\text{come poset}}{\cong} \mathcal{S}(\mathcal{Q}_{|F|}/_{|F|})$ $\mathcal{Q}_{|F|}/_{|F|}$ = arrangiamento in $\mathbb{R}^n/_{|F|}$ dato dagli $H/_{|F|}$. $G \in \mathcal{S}^{\leq F} \longleftrightarrow G'$ in $\mathcal{S}(\mathcal{Q}_{|F|})$ $\longleftrightarrow G'' \in \mathcal{S}(\mathcal{Q}_{|F|}/_{|F|})$, con con $G' = G'' \times |F|$.
Se $\mathcal{Q}$ è essenziale, $\Delta(\mathcal{S})$ è una palla triangolata (di dim n).

dim. Prima osservazione: $\mathcal{S}^{\leq F} \leftrightarrow \mathcal{S}_{|F|}$ in $\mathcal{Q}_{|F|}$
Ogni strato in $\mathcal{Q}_{|F|}$ si ottiene da uno strato di $\mathcal{Q}_{|F|}/_{|F|}$ moltiplicato per $|F|$.



Sia $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. $\forall F \in \mathcal{S}' = \mathcal{S} \setminus \{0\}$,
$\bar{F} \cap S^{n-1} \cong D^{n-1-k}$ ($k = \text{codim}\, F$) cioè:

$\{\bar{F} \cap S^{n-1}, F \in \mathcal{S}'\}$ dà una struttura di CW-complesso regolare (le mappe di attaccamento sono iniettive). La relazione di inclusione tra facce (il bordo) è esattamente la relazione $<$ nel poset $\mathcal{S}'$. Quindi $\Delta\mathcal{S}'$ coincide con la suddivisione baricentrica di S^{n-1} (come

CW-complesso regolare). Si può realizzare in $\mathbb{R}^n$ scegliendo $x(F) \in F$, $\|x(F)\| = 1$, $\forall F \in \mathcal{S}'$. Una catena

$F^{j_0} < F^{j_1} < \dots < F^{j_k}$, $j_k \leq n-1$ (j_i = codimensione) corrisponde al simplesso geometrico $\sigma = [x(F^{j_0}), \dots, x(F^{j_k})]$.

Aggiungere il punto $x(F^n) = 0$ e tutti i simplessi σ che lo contengono ($j_k = n$) corrisponde a fare il cono di S^{n-1}, cioè un disco D^n (triangolato). ∎

Teorema $e(C \prec F) := \Delta\left(\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{\leq s(C \prec F)}\right) \cong \Delta\left(\mathcal{S}^{\leq F}\right)$ è una cella (triangolata) di dim $e(C \prec F)$ = codim F.

Idea della corrispondenza $\mathcal{S}^{\leq F} \leftrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{A}_{|F|}/|F|)$ e che è ~~generale~~

Vedremo: $\Delta(\mathcal{S}^c_{\mathbb{C}}) = \bigcup_{s(C \prec F) \in \mathcal{S}^c_{\mathbb{C}}} \Delta\left(\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{\leq s(C \prec F)}\right) = \bigcup_{s(C \prec F)} e(C \prec F)$

è una suddivisione in celle che rende $\Delta(\mathcal{S}^c_{\mathbb{C}})$ un CW-complesso.