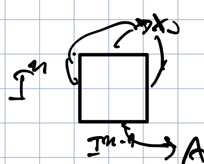
$F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ fibr. loc. banale, allora si ha succ. esatta

$$\to \pi_i(F) \to \pi_i(E) \to \pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F) \to \dots \to \pi_1(B) \to \pi_0(F)$$

Prop. (X,A) una coppia ($A \overset{i}{\hookrightarrow} X$), $x_0 \in A$. Si ha succ. esatta lunga:

$$\to \pi_n(A,x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X,x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X,A,x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A,x_0) \to \dots$$
$$\to \pi_1(X,A,x_0) \to \pi_0(A,x_0)$$

ricordiamo: $\pi_n(X,A,x_0) = \{f:(I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to (X,A,x_0)\}/\sim$

I^n 

$I^{n-1} = \{x_n = 0\}$ $\quad J^{n-1} = \partial I^n \setminus \mathrm{int}\, I^{n-1}$

(è un gruppo per $n \geq 2$)

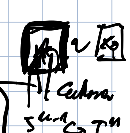
j_*: $\quad f:(I^n,\partial I^n) \to (X,x_0)$ definisce un'applicazione delle triple.

∂: $\quad I^n$ 

$f:(I^n,I^{n-1},J^{n-1}) \to (X,A,x_0)$

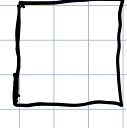
$\partial f := f|_{I^{n-1}}$

lo $0 \in \pi_n(X,A,x_0)$ è rappresentato da qualunque f: $\mathrm{Im} f \subset A$.



$j_* \circ i_*$: $\quad f:(I^n,\partial I^n) \to (A,x_0) \Rightarrow j\circ i(f):(I^n,I^{n-1},J^{n-1}) \to (X,A,x_0) \sim 0$

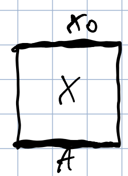
$\partial \circ j_*$: $\quad f:(I^n,\partial I^n) \to (X,x_0) \Rightarrow (\partial\circ j)f:(I^{n-1},\partial I^{n-1}) \to (A,x_0)$ è 0



$i_* \circ \partial$: $\quad f:(I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$

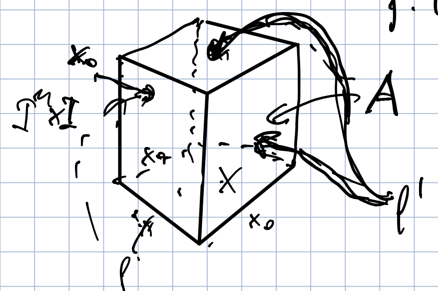
$$(i\circ\partial)(f):(I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (X, x_0) \sim 0 \text{ in } X$$

tramite f stessa.



Im $i_* \supset$ ker j_* : $\quad f:(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)$ t.c.

$f:(I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to (X,A,x_0)$ sia $\overset{F}{\sim} 0$

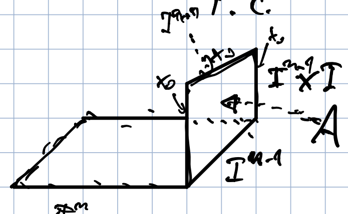


$f \underset{\text{rel }\partial I^n}{\sim} f':(I^n,\partial I^n)\to(A,x_0)$

$F: I^{n+1}\to X$ definisce l'omotopia tra f e f'

Im $j_* \supset$ ker ∂ : $\quad f:(I^n,I^{n-1},J^{n-1})\to(X,A,x_0)$

t.c. $f|_{I^{n-1}}:(I^{n-1},\partial I^{n-1})\to(A,x_0)\sim 0$



dà una

$g:(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)$ t.c.

$g:(I^n,I^{n-1},J^{n-1})\to(X,A,x_0)$

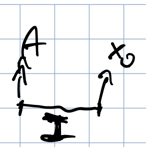
$\sim f$ in (X,A,x_0)

Im $\partial \supset$ ker i_* $\quad f:(I^{n-1},\partial I^{n-1})\to(A,x_0)$ t.c.

$i\circ f:(I^{n-1},\partial I^{n-1})\to(X,x_0) \overset{F}{\sim} x_0$

$F:(I^n, I^{n-1}, J^{n-1})\to(X,A,x_0)$ t.c. $F|_{I^{n-1}} = f$

$\pi_1(X,A,x_0)\to\pi_0(A,x_0)$ = {componenti connesse di A}



∂f $\qquad$ $f:(I,0,1)\to(X,A,x_0)$

$\|$

$f(0)$

<u>dim succ. esatta fibrato</u> Applichiamo alla coppia (E,F),

$F=p^{-1}(b_0)$, $b_0\in B$. Sia $e_0\in F$.

$$\to\pi_n(F,e_0)\xrightarrow{i_*}\pi_n(E,e_0)\xrightarrow{j_*}\pi_n(E,F,e_0)\xrightarrow{\partial}\pi_{n-1}(F,e_0)\to\dots$$

<u>Lemma</u> $p_*:\pi_n(E,F,e_0)\to\pi_n(B,b_0)$ è isomorfismo.

nota: $\pi_n(X,A,x_0)$ sono funtori $\quad f:(X,A,x_0)\to(X',A',x_0')$

$f_*:\pi_n(X,A,x_0)\to\pi_n(X',A',x_0')$.

$p:(E,F,e_0)\to(B,b_0,b_0)$. $\qquad \pi_n(B,b_0,b_0)=\pi_n(B,b_0)$

<u>dim. p_* iniettiva.</u> $f:(I^n,I^{n-1},J^{n-1})\to(E,F,e_0)$ t.c.

$p\circ f:(I^n,I^{n-1},J^{n-1})\to(B,b_0,b_0)$ sia ~ 0 in B

tramite $F:(I^n\times I,\partial I^n\times I)\to(B,b_0)$.

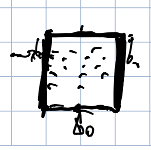
Per il teo sollevamento dell'omotopia $\exists\,\hat F:(I^n\times I, I^{n-1}\times I, J^{n-1}\times I)$

$\to(E,F,e_0)$ t.c. $p\circ\hat F=F$. Allora $\hat F|_{I^n\times\{1\}}\sim 0\sim$

$\sim\hat F|_{I^n\times\{0\}}=f$

<u>p_* surgettiva</u> $\quad g:(I^n,\partial I^n)\to(B,b_0)$. Vediamo g

come un'omotopia $g|_{I^{n-1}}:(I^{n-1}\times\{1\},\partial(I^{n-1}\times\{1\}))\to(B,b_0)$



sia $f:(I^{n-1}\times\{1\},\partial(I^{n-1}\times\{1\}))\to(F,e_0)$. $f\equiv e_0$

Sollevando g, $\exists\,F:(I^n,I^{n-1},J^{n-1})\to(E,F,e_0)$ t.c.

$p\circ F = g$. Una volta che g stabile su $\partial(I^{n-1}\times\{1\})$ $\Rightarrow$ F stabile

---

La successione è funtoriale: $f: E\to E'$ morfismo, $\bar f: B\to B'$, $e_0\in E$, $e_0' = f(e_0)$, $x_0 = p(e_0)$, $x_0' = p'(e_0') = \bar f(x_0)$, allora:

$$\begin{tikzcd}
\to \pi_n(F,e_0) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "(f_0)_*"] & \pi_n(E,e_0) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "f_*"] & \pi_n(B,x_0) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\bar f_*"] & \pi_{n-1}(F,e_0) \to \cdots \arrow[d, "(f_0)_*"] \\
\to \pi_n(F',e_0') \arrow[r, "j'_*"] & \pi_n(E',e_0') \arrow[r, "p'_*"] & \pi_n(B',x_0') \arrow[r, "\Delta'"] & \pi_{n-1}(F',e_0') \to
\end{tikzcd}$$

è commutativo. I due quadrati sono commutativi perché:

$f\circ j = j' f_0$, $\quad \bar f p = p' f$.

Il quadrato a destra:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_n(E,F_0,e_0) \arrow[dl, "\cong\, p_*"'] \arrow[dr, "\partial"] \arrow[dd, "f_*"] & \\
\pi_n(B,x_0) \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[d, "\bar f_*"'] & & \pi_{n-1}(F,e_0) \arrow[d, "(f_0)_*"] \\
\pi_n(B',x_0') \arrow[rr, "\Delta'"] & & \pi_{n-1}(F',e_0') \\
 & \pi_n(E',F_0',e_0') \arrow[ul, "\cong\, p'_*"] \arrow[ur, "\partial'"'] &
\end{tikzcd}$$

basta dimostrare che $f_0\, p_*^{-1} = (p'_*)^{-1}\bar f_*$ $\Leftarrow$ $p'_* f_* = \bar f_* p_*$ deriva da $p' f = \bar f p$

e $(f_0)_*\partial = \partial' f_*$ viene da

$f_0\,\partial = \partial' f$ (dove ∂: restrizione alla parte faccia I^{n-1})

oss. $(f_0)_*$ è isomorfismo. esempio. B' contrattile, $B = \mathrm{pto}$ $\quad B \xrightarrow{i} B'$

eq. ondulatoria. $\Rightarrow$ $F_0 \hookrightarrow E$ è retratto di deformazione. In realtà, si può dimostrare che un fibrato su uno sp. contrattile è fibrato banale.

def. Una sezione di un fibrato $\xi = (E, p, B, F)$ è una mappa $s: B \to E$ t.c. $p \circ s = id_B$ $(s(x) \in p^{-1}(x),\ \forall x \in B)$.

es. Un fibrato vettoriale ha sempre una sezione (la sezione nulla ad esempio)

Prop. Un fibrato principale (cioè con fibra G che agisce per moltiplicazione) $G \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ ha una sezione $\Leftrightarrow$ è banale.

dim $\Leftarrow$ Un fibrato banale ha sempre sezione $(s: B \to B \times F)$

$\Rightarrow$ Costruiamo una banalizzazione $\varphi: B \times G \xrightarrow{\sim} E$, mandando

$$\varphi(b,1) \longmapsto s(b) \quad \text{e in generale} \quad \varphi(b,h) = s(b) \cdot h.$$

L'azione di G su E (a destra) è data dal fatto che se

$$\phi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G \quad : \quad \phi_\alpha(y) = (b, g)$$
$$\phi_\alpha(y') = (b, g \cdot h)$$

$$\phi_\beta \phi_\alpha^{-1}(b, g) = (b, g_{\beta\alpha} \cdot g) \qquad b \in U_\alpha \cap U_\beta$$
$$\phi_\beta \phi_\alpha^{-1}(b, gh) = (b, g_{\beta\alpha} \cdot g \cdot h)$$

da cui

$$y = \phi_\alpha^{-1}(b, g) = \phi_\beta^{-1}(b, g_{\beta\alpha} g)$$
$$y' = \phi_\alpha^{-1}(b, gh) = \phi_\beta^{-1}(b, g_{\beta\alpha} g h)$$

la moltiplicazione (a destra) per $g \in G$ definisce un'azione di G su E con orbite = fibre.

Prop. Se $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ ha una sezione $s : B \to E$ allora si ha decomposizione $\pi_n(E) = \pi_n(B) \ast \pi_n(F)$, $n \geq 2$.

dim. $p \circ s = id_B \Rightarrow$

$p_\ast \circ s_\ast = id_{\pi_n(B)} \Rightarrow s_\ast$ iniettiva e $p_\ast$ è surgettiva, $\forall n$.

Quindi $\Delta : \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F)$ è 0 e segue $i_\ast : \pi_n(F) \to \pi_n(E)$ è iniettiva. Quindi la succ. lunga si spezza in succ. esatte corte che spezzano.

$$1 \to \pi_n(F) \xrightarrow{i_\ast} \pi_n(E) \underset{\curvearrowleft s_\ast}{\xrightarrow{p_\ast}} \pi_n(B) \to 1 \qquad n \geq 1$$

Se $n \geq 2$, $\pi_n(E)$ è abeliano, e quindi si ha dec. in $\oplus$.

oss 1) Se $n=1$ vale ancora $\pi_1(E) = \pi_1(F) \rtimes \pi_1(B)$.

2) La succ. esatta di omotopia vale anche se F è disconnesso, addirittura discreta (rivestimento). In questo caso $\pi_n(F) = 0$ se $n \geq 1$, e ritroviamo $\pi_n(E) \cong \pi_n(B)$ se $n \geq 2$,

$$1 \to \pi_1(E) \to \pi_1(B) \to \pi_0(F) \to 1$$

3) $B = K(G,1)$, $E \xrightarrow{p} B$ riv. universale, che è riv. regolare a fibra G. Questo rivestimento serve come "modello classificante" per tutti i rivestimenti a fibra G: ogni rivestimento $E' \xrightarrow{p'} B'$ a fibra G è "classificato" da un'applicazione

$$f : B' \to B, \quad \text{con} \quad E' = f^\ast(E),$$

e mappe omotope danno rivestimenti isomorfi.

4) G gruppo continuo, $\exists$ un'analoga costruzione di "fibrato classificante" $EG \xrightarrow{p} BG$, che è un fibrato principale

con gruppo G, ed EG è contrattile. Ogni fibrato principale $E \xrightarrow{p} B$ è "classificato" da una mappa $f: B \to BG$ con $E = f^*(EG)$.

<u>esempio</u> $G = GL_n(\mathbb{R})$ allora $BG = Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$

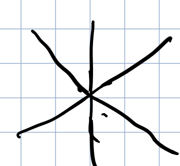
Ricordo la stratificazione di $\mathbb{R}^n$ per un gruppo W di riflessioni.
$\mathcal{Q} = \{H_\alpha\}$, $\alpha \in \Pi$, arrangiamento di iperpiani di riflessione.
Fissare C_0 camera, allora $\overline{C_0}$ è un dominio fondamentale
$S = \{s_\alpha, \alpha \in \Delta\}$, le strata di tipo $T \subset S$ di $\overline{C_0}$
(detto $\Delta_T = \{\alpha \in \Delta \mid s_\alpha \in T\}$)

$$C_T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x,\alpha) = 0 \text{ se } \alpha \in \Delta_T,\ (x,\alpha) > 0\ \alpha \in \Delta \setminus \Delta_T\}$$

$\left(C_\emptyset = C,\ C_S = \bigcap_{\alpha \in \Delta} H_\alpha = \bigcap_{H \in \mathcal{Q}} H \right)$ Assumiamo W <u>essenziale</u>

$\bigcap_{H \in \mathcal{Q}} H = \{0\}$. (se non lo fosse, si fa agire W su $\left(\bigcap_{H \in \mathcal{Q}} H\right)^\perp$ e ci si riconduce al caso essenziale)

(es: $A_2 = \sigma_3$ $\{x_i = x_j\}$



mi riconduco a questo.)

Stab $C_T = W_T = \langle s_\alpha \mid \alpha \in T \rangle$.
Partendo da $\mathcal{S}_0 = \{C_T \mid T \subset S\}$ si ottiene una stratificazione di tutto $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{S} = \{w . C_T,\ T \subset S,\ w \in W\}$$

$$w C_T = w' C_{T'} \iff T = T', \quad w' \in w W_T$$

Quindi $\mathcal{S} \longleftrightarrow$ classi laterali di W_T, $T \subset S$.

ogni classe laterale wW_T può essere individuata prendendo l'unico elemento $\gamma \in wW_T$ di lunghezza minima

($\gamma \in W^T = \{ w \in W \mid \ell(w s_\alpha) > \ell(w), \; s_\alpha \in T \}$)

Un'analoga stratificazione di $\mathbb{R}^n$ si può ottenere da un qualunque arrangiamento $\mathcal{Q} = \{ H_i \}_{i \in \mathcal{I}}$ di $\mathbb{R}^n$.

$H_i = \{ (\alpha_i, x_0) = 0 \}$; allora si ha la stratificazione $\mathcal{S}$ di $\mathbb{R}^n$ i cui strati sono

$$\mathcal{S} = \{ \text{camere di } \mathcal{Q}^X \subset X \;,\; X \in L(\mathcal{Q}) \}$$

ricordo: $\underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cap}{\mathcal{Q}_X}} = \{ H \in \mathcal{Q} \mid X \subset H \}$, $\mathcal{Q}^X = \{ X \cap H \mid H \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}_X \}$

Ogni strato F $(\subset X)$ è definito univocamente da un insieme di uguaglianze e disuguaglianze. $\forall \; H \in \mathcal{Q}$, $H = \{ (\alpha, x) = 0 \}$

definiamo

$$H(F) = H \quad \text{se } F \subset H$$
$$H(F) = \{ x \in V \mid (\alpha, x) > 0 \} \quad \text{se } F \not\subset H, \; (\alpha, F) > 0$$
$$H(F) = \{ x \in V \mid (\alpha, x) < 0 \} \quad \text{se } F \not\subset H, \; (\alpha, F) < 0$$

allora
$$F = \bigcap_{H \in \mathcal{Q}} H(F)$$

Strati li chiamiamo **facce**. Hanno un rango F^k, k = codimensione

supporto di F $\quad |F| = \operatorname{span}(F) = X \in L(\mathcal{Q})$.

$$|\;| : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Q}) : \quad F \to |F|$$ conserva il rango

ordine parziale su $\mathcal{F}$: $\quad F \preceq G \iff cl(F) \supset G$

(cioè la mappa $|\;|$ preserva l'ordine $\quad F \preceq G \Rightarrow |F| \preceq |G|$).