$\mathcal{A} = \{H_\alpha\}$ in $\mathbb{R}^n$, associato a un gruppo $W$.

$$H_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\alpha, x) = 0\}$$

<u>Def</u> La <u>complessificazione</u> dell'iperpiano $H_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ è l'iperpiano $(H_\alpha)_\mathbb{C}$ di $\mathbb{C}^n$ con le stesse equazioni (reali):

$$(H_\alpha)_\mathbb{C} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid (\alpha, z) = 0\}$$

se $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, si ha:

$$(\alpha, z) = 0 \iff (\alpha, x+iy) = (\alpha, x) + i(\alpha, y) = 0 \iff$$
$$(\alpha, x) = 0 \text{ e } (\alpha, y) = 0$$

cioè $z \in (H_\alpha)_\mathbb{C} \iff \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in H_\alpha$.

$\operatorname{codim}_\mathbb{R} (H_\alpha)_\mathbb{C} = 2$.

$\mathcal{A}$ arrangiamento reale, $\mathcal{A}_\mathbb{C} = \{(H_\alpha)_\mathbb{C} \mid H_\alpha \in \mathcal{A}\}$ complessificato

<u>Es 1)</u> $\mathcal{A}$ booleano $= \bigcup_{i=1}^n \{x_i = 0\} \Rightarrow$

$$\mathcal{A}_\mathbb{C} = \bigcup \{z_i = 0\}$$

2) $\mathcal{A} = \bigcup_{i,j} \{x_i = x_j\}$ $\qquad \mathcal{A}_\mathbb{C} = \bigcup_{i,j} \{z_i = z_j\}$ in $\mathbb{C}^n$.

---

<u>Def.</u> Lo <u>spazio di configurazione</u> (configuration space) di tipo $W$ è lo spazio

$$\tilde{Y}_W = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{H_\alpha \in \mathcal{A}} (H_\alpha)_\mathbb{C}$$

---

nell'es 1: $\tilde{Y}_W = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_i \{z_i = 0\} = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_i \neq 0\} \cong (\mathbb{C}^*)^n$

2. $\tilde{Y}_W = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i,j} \{z_i = z_j\} = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_i \neq z_j\}$

$\cong$ { n-ple ordinate $z_1, \dots, z_n$ di punti in $\mathbb{C}$ } $= \tilde{F}(\mathbb{C}, n)$

Azione di $W$ su $\mathbb{R}^n$, estendibile a $\mathbb{C}^n$ in modo diagonale:

$$w.z = w.(x+iy) = w.x + i\, w.y$$

<u>Proposizione</u>. L'azione di $W$ su $\mathbb{C}^n$ è libera esattamente su $\tilde{Y}_W$.

<u>dim</u>. Si ha:

$$w.z = w.x + i\, w.y = z = x+iy \iff w.x = x \text{ e } w.y = y$$

quindi:

$$\mathrm{Stab}(z) = \mathrm{Stab}(x) \cap \mathrm{Stab}(y)$$

Abbiamo visto che $\mathrm{Stab}(P) = \langle s_\alpha \mid H_\alpha \ni P \rangle$. Quindi

$$\mathrm{Stab}(z) \neq \{1\} \iff \exists\, H_\alpha \text{ t.c. } x, y \in H_\alpha \iff z \in (H_\alpha)_{\mathbb{C}}$$

$\square$

<u>Corollario</u>. Lo spazio quoziente $Y_W = \tilde{Y}_W / W$, i cui punti corrispondono alle orbite di $W$, è una varietà liscia. Si ha un rivestimento regolare:

$$\tilde{Y}_W \longrightarrow Y_W \quad \text{con fibra } W. \qquad (1)$$

e si ha una succ. esatta:

$$1 \to \pi_1(\tilde{Y}_W) \to \pi_1(Y_W) \longrightarrow W \longrightarrow 1 \qquad (2)$$

$\square$

<u>Def</u>. $Y_W$ si dirà spazio di configurazione delle orbite (spazio delle orbite, o di configurazione, chiamando "puro" $\tilde{Y}_W$) di tipo $W$.

Es 1). $\hat{Y}_W \cong (\mathbb{C}_*)^n$ W agisce

$$s_1^{\varepsilon_1}\cdots s_n^{\varepsilon_n}(z_1,\dots,z_n) = (\varepsilon_1 z_1,\dots,\varepsilon_n z_n)$$

quindi $Y_W = (\mathbb{C}_*/\pm 1)^n$ $\mathbb{C}_*/\pm 1 \cong \mathbb{C}_*$.

quindi $Y_W \cong (\mathbb{C}_*)^n$

$$\mathbb{Z}_2^n \hookrightarrow \hat{Y}_W \longrightarrow Y_W$$

$$1 \to \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow 1$$
$$\varepsilon_i \longrightarrow 2\varepsilon_i$$

2) $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \hat{Y}_W = \{(z_1,\dots,z_n),\ z_i \in \mathbb{C},\ z_i \neq z_j\} = \hat{F}(\mathbb{C},n)$

$$\downarrow$$

$Y_W = \{\{z_1,\dots,z_n\} \mid z_i \in \mathbb{C},\ z_i \neq z_j\} = F(\mathbb{C},n)$

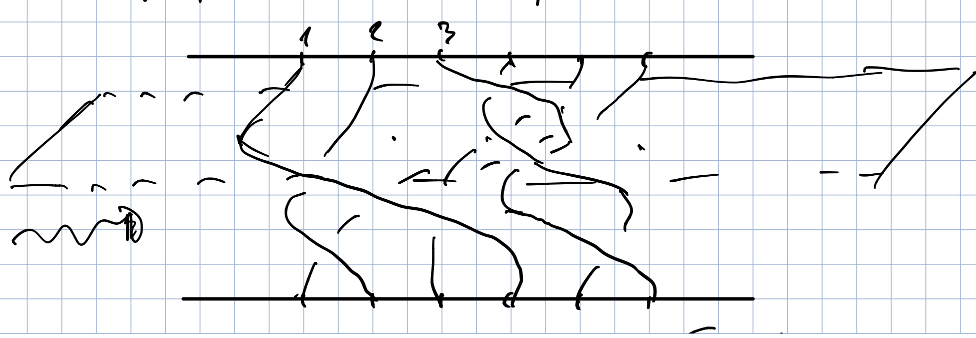
Le fibre di un punto $p = \{z_1,\dots,z_n\}$ sono tutte le n-uple ordinate $(z_{\sigma 1},\dots,z_{\sigma n})$

$$1 \to \pi_1(\hat{Y}_{\mathfrak{S}_n}) \longrightarrow \pi_1(Y_{\mathfrak{S}_n}) \longrightarrow \mathfrak{S}_n \longrightarrow 1$$

$\pi_1(Y_{\mathfrak{S}_n}, p_0)$ $p_0 = \{1,2,\dots,n\} \subset \mathbb{C}$

un cammino $c : (I,\partial I) \longrightarrow (Y_{\mathfrak{S}_n}, p_0)$ è

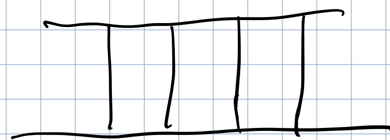
$c(t) = \{z_1(t),\dots,z_n(t)\}$ n-uple di punti distinti



$\mathbb{C}\times I$

**treccia**. Trecce / omotopia  [$\pi_1(Y_n)$ si dice gruppo delle trecce a $n$ fili]

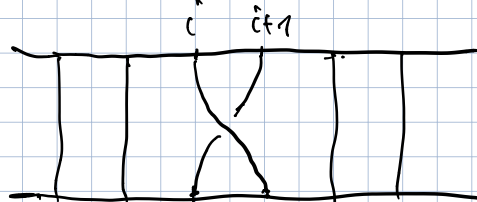
gruppo: identità



costante

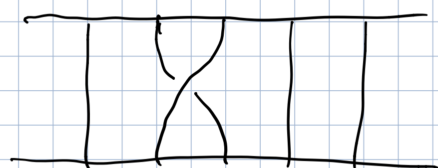
**generatori**

$\sigma_i$

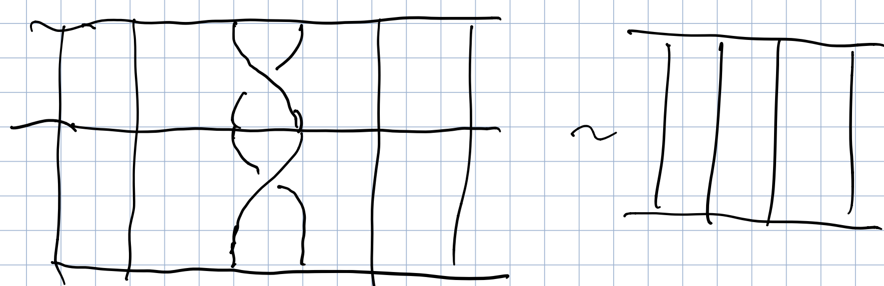



l'inverso di una treccia è la sua "speculare"

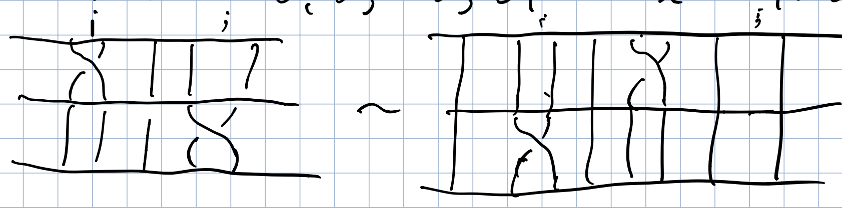
$\sigma_i^{-1}$



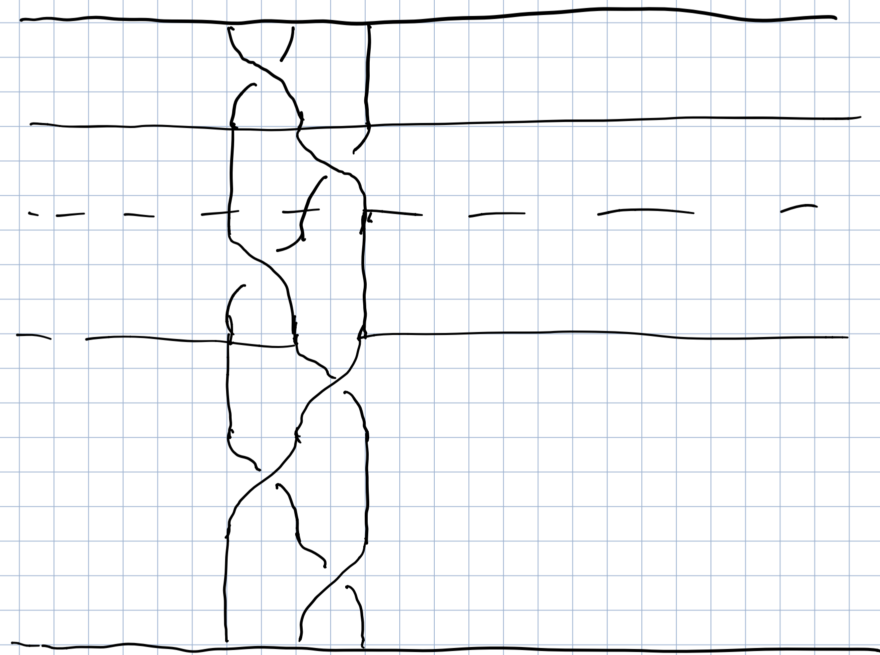
composizione: si fa mettendo una treccia dopo l'altra:



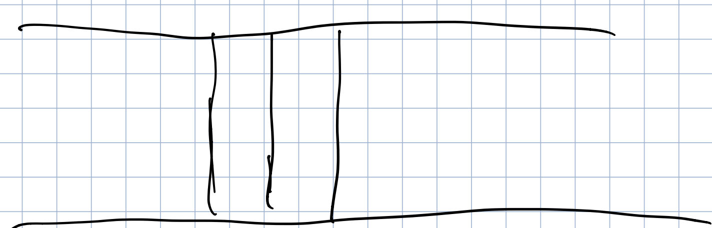
Relazioni: ovvio  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  se $|i-j| > 1$



$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ $\qquad$ $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1} = 1$



$\sim$



---

**Teorema** Lo spazio delle orbite $Y_{\omega}$ è uno spazio di tipo $K(\pi,1)$.

---

**def** Uno sp. topologico $X$ si dice spazio di Eilenberg-Maclane (o spazio di tipo $K(\pi,1)$) se $\pi_i(X)=0$ per

$i > 1$.

---

$\pi_i(X, x_0) = \{ f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0) \} /$ omotopia

omotopie $F : I^n \times I \to X$, $F(\partial I^n \times I) = x_0$.

- $\pi_i(X, x_0)$, $i \geq 2$, è un gruppo abeliano. $\pi_i$ è un funtore
- Se $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ è un rivestimento, $p_* : \pi_i(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_i(X, x_0)$ è un isomorfismo per $i \geq 2$.

Teo Sia $X$ CW-complesso. Allora $X$ è un $K(\pi, 1)$ $\iff$ il rivestimento universale $\tilde{X}$ di $X$ è contrattile.

dim. Per l'oss. sopra, $\pi_i(\tilde{X}) = 0$, $\forall i$, e inoltre anche $\tilde{X}$ è un CW-complesso. Allora si applica il teo di Whitehead $\square$

- def. un'equivalenza debole tra $X$ e $Y$ è una mappa $f : X \to Y$ t.c. $f_* : \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ è un'isomorfismo $\forall i$.

$X \sim Y \Rightarrow X$ deb. equiv. a $Y$

---

Teo (Whitehead) $X, Y$ CW-complessi, $f : X \to Y$ equivalenza debole $\Rightarrow$ $f$ è equivalenza omotopica.

---

Nel teo: $* \hookrightarrow \tilde{X}$ è un'equiv. debole.

Teo $\forall$ gruppo $G$, $\exists$ sp. topologico (anzi un CW-complesso) che sia $K(G, 1)$

notazione: dato $G$ gruppo, $K(G,1)$ indica uno spazio $X$ t.c. $\pi_1(X)=G$, $\pi_i(X)=0$, $i>1$

**dim.** $G=\langle g_i,\ i\in I \mid R_j,\ j\in J\rangle$ presentazione.
Costruiamo $X=K(G,1)$ ricorsivamente su $X_n$ ($X_n$: $n$-scheletro)
$X_0=\{x_0\}$ 1 punto. Prendiamo

$$X_1=\bigvee_{i\in I} S^1_i .$$

Attacchiamo una 2-cella $e^2_j$ $\forall j\in J$ secondo la relazione $R_j$: $R_j=$ parola nei $g_i$: $g_{i_1}^{\varepsilon_1}\cdots g_{i_n}^{\varepsilon_n}$
se $\alpha_i:(I,\dot I)\to(S^1_i,x_0)$.
$\partial D^2\to X_1$ secondo la parola $\alpha_{i_1}^{\varepsilon_1}\cdots\alpha_{i_n}^{\varepsilon_n}$.
Questo definisce $X_2$. $\pi_1(X_2,x_0)=G$.
Se $\pi_2(X_2)\neq 0$, attacchiamo una 3-cella a $X_2$ con funzione di attaccamento che rappresenta un generatore di $\pi_2(X_2)$.

**oss.** Attaccando una $K$-cella $e^k$ a uno sp. $Y$, $Y'=Y\cup_\varphi e^k$,
$\pi_i(Y)=\pi_i(Y')$ per $i\le K-2$.
(per il teo di approssimazione cellulare)

**Teo approx. cellulare** $X$ CW-complesso, $Z$ CW-complesso di dim $K$.
Allora $\forall f:Z\to X$ è omotopa a un'applic. $g:Z\to X_K$

si applica con $Z=(S^K,*)$.

$X_3$ t.c. $\pi_1(X_3)=G$, $\pi_2(X_3)=0$. Vado avanti e trovo $X_K$ t.c. $\pi_1(X_K)=G$, $\pi_i(X_K)=0$ $i=2,\dots,K-1$.
$X=\varinjlim_n X_n$, è un $K(G,1)$. $\square$

**Teorema** $X$ CW-complesso, $x_0 \in X$, $\pi_1(X_2, x_0) = G$, e sia $Y$ uno spazio di tipo $K(G',1)$ $(\pi_1(Y,y_0) = G')$.
Se $h: G \to G'$ è un omomorfismo di gruppi $\exists$ applicazione $f: (X,x_0) \to (Y,y_0)$ t.c. $f_* = h$ sui $\pi_1$.
$f$ è unica a meno di omotopia.

---

**Corollario** Se $X, Y$ sono CW-complessi entrambi $K(G,1) \Rightarrow$ $X \simeq Y$ (esercizio)

---

**dim** assumiamo $X_0 = \{x_0\}$, quindi $X_1 = \bigvee_{\alpha \in I} S^1_\alpha$

$f$ si costruisce ricorsivamente sugli scheletri $X_n$.

Partiamo da $f(x_0) = y_0$.

$h$ manda $x_\alpha = [a_\alpha] \longmapsto y_\alpha \in G'$ $\qquad y_\alpha = [b_\alpha]$

$a_\alpha: (I, \dot{I}) \to (S^1_\alpha, x_0)$ $\qquad b_\alpha: (I,\dot{I}) \to (Y, y_0)$

Definiamo $f$ su $X_1$

$f|_{S^1_\alpha}: a_\alpha(t) \longmapsto b_\alpha(t)$

questo definisce $f$ su $X_1$. Notiamo:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X_1, x_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "f_*"'] & \pi_1(X, x_0) = G \arrow[d, "h"] \\
& \pi_1(Y, y_0) = G'
\end{tikzcd}$$

è commutativo per come è costruita $f$.

Sia ora $\varphi_\beta: \partial D^2 \to X_1$ l'appl. d'attaccamento di una 2-cella di $X$. $f \circ \varphi_\beta: S^1 \to Y$ è omotopa a una costante in $Y$. Scelgo $* \in S^1$, $\varphi_\beta \sim \varphi'_\beta: (S^1, *) \to (X_1, x_0)$ (es.)

Allora:

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1,*) \arrow[r, "(\varphi'_\beta)_*"] & \pi_1(X_1,x_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "f_*"'] & \pi_1(X,x_0) \arrow[d, "h"] \\
 & & \pi_1(Y,y_0)
\end{tikzcd}
$$

$(i\circ\varphi'_\beta)_* = 1$ perché l'applicaz. d'att. di una cella è $\simeq 0$ per costruz. in $X$. $\Rightarrow$ $f_*(\varphi'_\beta)_* = 1$. $f\circ\varphi_\beta \simeq 1$ $\Leftrightarrow$ si estende a $D^2$, $\exists$ una $F: D^2\to Y$ t.c. $F|_{\partial D^2} = f\circ\varphi_\beta$.

Allora se $\psi_\beta : D^2 \to X$ è la funzione caratteristica della cella possiamo estendere $f$ a $\psi_\beta(D^2)$ ponendo $f\psi_\beta(x) = F(x)$.

Questo estende $f$ a tutto $X_2$.

L'estensione a $X_n$, $n\geq 3$, si fa: supponendo di aver già esteso $f$ a $X_{n-1}$, sia $\psi: D^n \to X_n$ la funzione caratteristica di una $n$-cella. $f\circ\psi|_{\partial D^n} : \partial D^n \to Y$ è un'appl. di una $(n-1)$-sfera in $Y$ $(n-1\geq 2)$. Siccome $\pi_{n-1}(Y) = 0$ $\Rightarrow$ $f\circ\psi|_{\partial D^n}$ è omotopa a costante $\Rightarrow$ si estende a $\psi(D^n)$.

Andando avanti, si estende $f$ a tutto $X$.

L'unicità si fa anche qui ricorsivamente. Se $g: (X,x_0) \to (Y,y_0)$ soddisfa le stesse assunzioni, siccome $f|_{S^1_\alpha} \simeq_{rel} g|_{S^1_\alpha}$, allora ho un'omotopia $F: X_1\times I \to Y$ di $f|_{X_1}$ e $g|_{X_1}$ rel $x_0$.

Supponendo quindi di aver già costruito $F: X_{n-1}\times I \to Y$, si costruisce cella dopo cella $F: X_n \times I \to Y$ come segue.

Rimarrebbe il caso dove $X_0$ ha più di 1 punto.

In questo caso, $X_1$ (connesso) è un grafo: $X_0$ vertici, le 1-celle sono i lati. Sia $T \subset X_1$ un albero massimale (sottografo contrattile) Allora $\forall$ lato di $X_1$: $e \notin T$, ho un generatore di $\pi_1(X_1, x_0)$ e questi sono generatori liberi di $\pi_1(X, x_0)$.

Si procede come prima mandando $T \to y_0$. ∎