W gruppo di riflessioni in $V = \mathbb{R}^n$ $\rightsquigarrow$ $\mathcal{A} = \{H_\alpha\}$
arrangiamento di iperpiani in V (stabile per W)

Consideriamo un campo $\mathbb{K}$ (in generale $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) e un arrangiamento di iperpiani $\mathcal{A} = \{H_i\} \subset V$, V sp. vett. su $\mathbb{K}$
una collezione finita di sottospazi di codim. 1.

<u>Def.</u> Il reticolo delle intersezioni di $\mathcal{A}$ è:

$$L(\mathcal{A}) = \{ X \subset V \mid X = \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H, \text{ per qualche } \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \}$$

$V \in L(\mathcal{A})$ $(\mathcal{B} = \emptyset)$, $H_i \in L(\mathcal{A})$, $H_i \cap H_j$, ...

<u>Def.</u> Un $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ si chiamerà un sottoarrangiamento. Per $X \in L(\mathcal{A})$, definiamo il sottoarrangiamento di V:

$$\mathcal{A}_X = \{ H \in \mathcal{A} \mid X \subset H \} \quad \text{in } V$$

$\left(X = \bigcap_{H \in \mathcal{A}_X} H \right)$. Definiamo anche

$$\mathcal{A}^X = \{ X \cap H \mid H \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_X \} \quad \text{in } X.$$

(restrizione ad X)

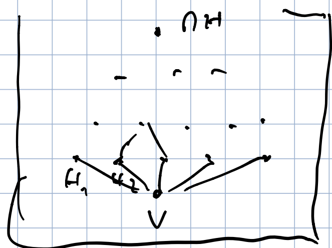
<u>Def</u> $$N(\mathcal{A}) = \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$$

$$M(\mathcal{A}) = V \setminus N(\mathcal{A}) = V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$$

In $L(\mathcal{A})$ introduciamo un ordine parziale: $X \leq Y \Leftrightarrow Y \subset X$
(quindi $\min L = V$, $\max L = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$)

Def $X \in L(\mathcal{Q})$, $r(X) = \operatorname{codim} X$ $\big(r(V)=0,\ r(H)=1, \dots$
$r\big(\bigcap_{H\in\mathcal{Q}} H\big) \underset{\text{def}}{=} r(\mathcal{Q})\ \big)$

diagramma di Hasse: un punto $\forall X \in L(\mathcal{Q})$ (alla stessa altezza quelli con lo stesso rango) e un lato tutte le volte che $X < Y$, dove Y "copre" X ($\nexists\ Z : X < Z < Y$)



atomi: gli iperpiani ($r = 1$)

meet: $X \wedge Y = \cap \{ Z \subset L(\mathcal{Q}) / X \cup Y \subset Z \} \in L(\mathcal{Q})$
$= \cap \{ H \in \mathcal{Q} / X \cup Y \subset H \}$

join: $X \vee Y = X \cap Y = \{ H \in \mathcal{Q} / X \subset H \text{ o } Y \subset H \}$

Lemma $L(\mathcal{Q})$ è un reticolo geometrico. Cioè:
1) $\forall X \in L(\mathcal{Q})$, $r(X) \geq 1$, $\exists$ atomi $H_1, \dots, H_n$ t.c. $X = H_1 \vee \dots \vee H_n$
2) $\forall X \in L(\mathcal{Q})$, tutte le catene massimali $V = X_0 < X_1 < \dots < X_n = X$ hanno la stessa cardinalità ($= r(X)$).
3) $\forall X, Y \in L$
$$r(X \wedge Y) + r(X \vee Y) \leq r(X) + r(Y)$$

---

dim 1) è per definizione
2) Data una catena di iperpiani $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{Q}$ indipendenti t.c. $X_i = H_1 \cap \dots \cap H_i$, $i \geq 1$, $X_n = X$, è chiaro che $\dim X_{i+1} = \dim X_i - 1$ e la catena $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ è massimale $n = r(X)$.
Viceversa, data una catena massimale $(X_1, \dots, X_n)$ allora $\dim X_{i+1} =$

$= \dim X_i - 1$ (altrimenti $\exists$ iperpiani $H, H' \in \mathcal{A}$ t.c. $X_i \notin H, H'$
$X_{i+1} \subset H, H'$, e quindi $\dim(X_i \cap H) = \dim X_i - 1 > \dim X_{i+1}$
$X_i \subsetneq X_i \cap H \subsetneq X_{i+1}$)

3) Grassmann + $\dim(X+Y) \leq \dim(X \wedge Y)$.

$\blacksquare$

Esempi. 1) $\mathcal{A} = \bigcup_i \{x_i = 0\}$ in V. (riflessioni rispetto agli iperpiani coordinati $\mathbb{Z}_2^n$)

$L(\mathcal{A}) \longleftrightarrow \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ parti

$L(\mathcal{A}) \ni X \longleftrightarrow \mathcal{P}_X$ {indici i t.c. $x_i = 0$}

$X \vee Y \longleftrightarrow \mathcal{P}_X \cup \mathcal{P}_Y$

$X \wedge Y \longleftrightarrow \mathcal{P}_X \cap \mathcal{P}_Y$

2) $\mathcal{A} = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{x_i = x_j\} \longleftrightarrow \Pi(\{1, \dots, n\})$ = partizioni di $\{1, \dots, n\}$

$L(\mathcal{A}) \ni X \longleftrightarrow \Pi_X$: { $i, j \in$ stesso blocco $\Longleftrightarrow x_i = x_j$ }

$X < Y \Longleftrightarrow \Pi_X$ è più fine di Π_Y

$\min L = V \longleftrightarrow \Pi_V = [1][2]\cdots[n]$

$Z = \max L = \bigcap H_{ij} \longleftrightarrow \Pi_Z = [1, \dots, n]$
$\shortparallel$
$\mathrm{Span}(1, \dots, 1)$

Funzione di Moebius del reticolo.

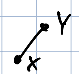
$\mu : L \times L \to \mathbb{Z}$ definita ricorsivamente come:

1) $\mu(X, X) = 1$, $X \in L$

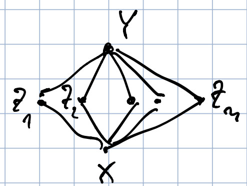
2) $\sum_{X \leq Z \leq Y} \mu(X, Z) = 0$, $X, Y, Z \in L$, $X < Y$

3) $\mu(X,Y)=0$ se $X,Y\in L$, $X \not\leq Y$

oss. Se $X<Y$, $\nexists\, Z\in L$ t.c. $X<Z<Y$, allora la 2)



$$\mu(X,X)+\mu(X,Y)=0 \Rightarrow \mu(X,Y)=-1$$



per 2): $$\mu(X,X)+\sum_{i=1}^{n}\mu(X,Z_i)+\mu(X,Y)=0$$

$$1-n+\mu(X,Y)=0 \Rightarrow \mu(X,Y)=n-1$$

Se $X\leq Y$. $\mathrm{Cat}[X,Y]=\{c=(X_1<\cdots<X_p) \mid X_i\in L,\ X_1=X,\ X_p=Y\}$

$|c|=\#c\ (=p)$

Prop. $$\mu(X,Y)=\sum_{c\in \mathrm{Cat}[X,Y]}(-1)^{|c|-1}$$

dim. Chiamo $\mu'(X,Y)$ il 2° membro e verifico 1), 2), 3).

1) $\mu'(X,X)=\left[\mathrm{Cat}[X,X]=\{c=(X)\},\ |c|=1\right]=1$

2) $X<Y$: $$\sum_{X\leq Z\leq Y}\mu'(X,Z)=\sum_{X\leq Z\leq Y}\ \sum_{c\in\mathrm{Cat}[X,Z]}(-1)^{|c|-1}=$$

$$=\sum_{X\leq Z<Y}\ \sum_{c\in\mathrm{Cat}[X,Z]}(-1)^{|c|-1}+\sum_{c\in\mathrm{Cat}[X,Y]}(-1)^{|c|-1}=$$

$c=(X_1<\cdots<Z)\in\mathrm{Cat}[X,Z]$, $Z<Y$ $\longleftrightarrow$ $\hat{c}=(X_1<\cdots<Z<Y)\in\mathrm{Cat}[X,Y]$

$|c|=|\hat{c}|-1$

$$= \sum_{C \in Ch[X,Y]} (-1)^{|C|-2} + \sum_{C \in Ch[X,Y]} (-1)^{|C|-1} = 0 .$$

3) ome $\square$

Formule di inversione di Moebius.

In L, indichiamo con $L_X = \{ Z \leq X \}$, $L^X = \{ Z \geq X \}$

Prop. $f, g : L \to A$ A gruppo abeliano. Allora

1) $$g(Y) = \sum_{X \in L_Y} f(X) \iff f(Y) = \sum_{X \in L_Y} \mu(X,Y)\, g(X)$$

2) $$g(X) = \sum_{Y \in L^X} f(Y) \iff f(X) = \sum_{Y \in L^X} \mu(X,Y)\, g(Y)$$

Esercizio: $X < Y \Rightarrow \sum_{X \leq Z \leq Y} \mu(Z,Y) = 0$

---

dim. 1) $\Rightarrow$

$$\sum_{X \in L_Y} \mu(X,Y)\, g(X) = \sum_{X \in L_Y} \mu(X,Y) \sum_{Z \in L_X} f(Z) =$$

$$= \sum_{Z \leq Y} \left(\sum_{Z \leq X \leq Y} \mu(X,Y) \right) f(Z) = f(Y)$$

$$\Leftarrow \sum_{X \in L_Y} f(X) = \sum_{X \in L_Y} \sum_{Z \in L_X} \mu(Z,X)\, g(Z) = \sum_{Z \leq Y} \sum_{Z \leq X \leq Y} \mu(Z,X)\, g(Z)$$

$$= g(Y)$$

Def $X \in L(Q)$ $\quad \mu(X) \overset{def}{:=} \mu(V, X)$ $\quad V = \min L$

$(\mu(V) = 1,\ \mu(H) = -1,\ r(X) = 2 \Rightarrow \mu(X) = |Q_X| - 1,\ \dots)$

---

oss. $M(Q) = V \setminus \bigcup_{H \in Q} H.$ se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $M(Q)$ è sconnesso, e le componenti connesse sono le __camere__

(Problema: quante sono le camere?).

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, H ha codimensione reale 2 $\Rightarrow$ $M(Q)$ è connesso.

(Problema: topologia di $M(Q)$).

Def. Il polinomio di Poincaré di Q è:

$$\pi_Q(t) = \sum_{X \in L} \mu(X)(-t)^{r(X)}$$

$$\left[= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Big(\sum_{\substack{X \in L \\ \mathrm{codim} X = k}} \mu(X) \Big) t^k \right]$$

esercizio: $\mathrm{sgn}\, \mu(X) = (-1)^{r(X)}$, quindi π_Q ha coeff > 0.

Def. Polinomio caratteristico di Q: $\chi_Q(t) = t^l \pi_Q(-t^{-1}) =$
$$= \sum_X \mu(X)\, t^{\dim(X)}$$

$l = r(Q)$, $l \le n = \dim V$

(in generale M sp. top. $\mathrm{Poin}(M, t) = \sum_{i \geq 0} b_i t^i$

b_i = i-esimo numero di Betti di M $(b_i = \dim H_i(M; \mathbb{Q}))$)

Teorema $\mathcal{A}$ arrangiamento reale ($V \cong \mathbb{R}^n$). Sia $\mathrm{Cam}(\mathcal{A}) = \{\text{camere di } \mathcal{A}\}$. Allora:

$$|\mathrm{Cam}(\mathcal{A})| = \pi_{\mathcal{A}}(1)$$

Coroll. La def. di $\pi_{\mathcal{A}}$ dipende solo da $L(\mathcal{A})$. Quindi se due arrangiamenti $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ hanno reticoli $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}') \Rightarrow |\mathrm{Cam}(\mathcal{A})| = |\mathrm{Cam}(\mathcal{A}')|$.

---

def Una tripla di arrangiamenti è $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ t.c.
(relativa a un $H \in \mathcal{A}$)

$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{H\}$ arrangiamento in V;

$\mathcal{A}'' = \{H' \cap H \mid H' \in \mathcal{A}'\}$ $(= \mathcal{A}^H)$ è in H.

Teorema (cancellazione-restrizione) Se $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ è una tripla allora

$$\pi_{\mathcal{A}}(t) = \pi_{\mathcal{A}'}(t) + t\,\pi_{\mathcal{A}''}(t)$$

Lemma 1. $X \leq Y$. Sia $\mathcal{A}(X,Y) = \{\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \mid \mathcal{A}_X \subset \mathcal{B}, \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H = Y\}$

Allora:

$$\mu(X,Y) = \sum_{\mathcal{B} \in \mathcal{A}(X,Y)} (-1)^{|\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}_X|}$$

Lemma 2
$$\pi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{\mathcal{B} \subset \mathcal{A}} (-1)^{|\mathcal{B}|} (-t)^{r(\mathcal{B})}$$

dim formula canc-restr.:

$$\pi_Q(t) = \sum_{\substack{B\subset Q\\ H\notin B}} (-1)^{|B|}(-t)^{r(B)} + \sum_{\substack{B\subset Q\\ H\in B}} (-1)^{|B|}(-t)^{r(B)} =$$

$\|$ - per lemma

$$\pi_{Q'}(t) \qquad\qquad \| \qquad \sum_{Y\in L(Q'')} \sum_{B\in Q(H,Y)} (-1)^{|B|}(-t)^{r(Y)} =$$

$$= -\sum_{Y\in L(Q'')} \sum_{B\in Q(H,Y)} (-1)^{|B\setminus Q_H|}(-t)^{r(Y)} =$$

($Q_H = \{H\}$)

per lemma 1

$$= -\sum_{Y\in L(Q'')} \mu(H,Y)(-t)^{r(Y)} =$$

$r_Q(Y) = r_{Q''}(Y)+1$

$$= -\sum_{Y\in L(Q'')} \mu(H,Y)(-t)^{r_{Q''}(Y)+1} = t\,\pi_{Q''}(t)$$

$Q_V = \emptyset$

dim lemma 2 (usando lemma 1):

$$\pi_Q(t) = \sum_{X\in L} \mu(X)(-t)^{r(X)} = \sum_{X\in L}\sum_{B\in Q(V,X)} (-1)^{|B|}(-t)^{r(X)} =$$

= lemma 2 poichè $r(B)=r(X)$. □

---

dim lemma 1. Poichè:

$$\bigcup_{X\le Z\le Y} Q(X,Z) = \{B\subset Q \mid Q_X\subset B\subset Q_Y\}$$

e l'unione è disgiunta. Allora la somma a destra vale:

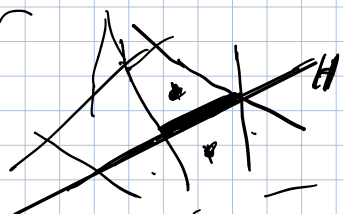
$$\sum_{X\le Z\le Y}\sum_{B\in Q(X,Z)} (-1)^{|B\setminus Q_X|} = \sum_{Q_X\subset B\subset Q_Y} (-1)^{|B\setminus Q_X|}.$$

$$= \begin{cases} \text{se } X = Y & = 1 \\ \text{se } X < Y & a_X \subsetneq a_Y \end{cases}$$ e la somma vale 0 perché è su tutti i sottoinsiemi di $a_Y \setminus a_X$. $\square$

<u>Lemma</u> Se (a, a', a'') è una tripla, allora anche

$$|\mathrm{Cam}\, a| = |\mathrm{Cam}\, a'| + |\mathrm{Cam}\, a''|$$

<u>dim</u>: esercizio.



rimuovendo H, alcune camere di a si "fondono" a creare una camera di a'. Corrispondono alle coppie di camere di a che hanno in comune come faccia una camera di a''.

<u>dim teo</u> $|\mathrm{Cam}\, a| = \pi_a(1)$

Anche $\pi_a(1)$ verifica: $\pi_a(1) = \pi_{a'}(1) + \pi_{a''}(1)$

Quindi $|\mathrm{Cam}\, a|$ e $\pi_a(1)$ verificano la stessa ricorrenza e coincidono per $a = \emptyset$. Quindi coincidono.

Esercizi: Calcolare $\pi_a(t$ per $1)$ di "booleana" $\bigcup_i \{x_i = 0\}$

2) $a = \bigcup \{x_i = x_j\}$ $\pi_a(t) = ?$