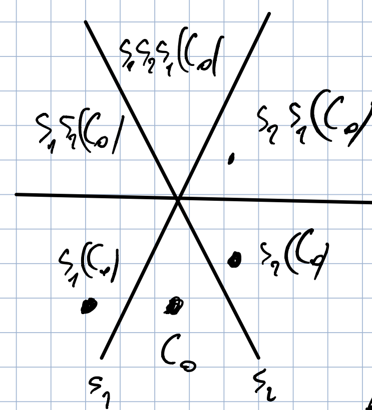
people.dm.unipi.it/salvetti...

---

$C_0$ , $W \leftrightarrow$ Camere $\qquad w \leftrightarrow w(C_0)$




$\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$

$\mathcal{M}(C', C'') = \{H \in \mathcal{A} \mid H$ separa $C', C''\}$

$C', C''$ camere.

$\mathcal{M}(w) = \{H \in \mathcal{A} \mid H$ separa $C_0$ da $w.C_0\}$

- $C, C'$ adiacenti se sono separate da un solo iperpiano

  le camere adiacenti a $C_0$ sono $s_\alpha(C_0)$, $s_\alpha \in S$ $(\alpha \in \Delta)$

- galleria $\Gamma = (C_1, \dots, C_k)$ successione di camere adiacenti

  $C_i$ e $C_{i+1}$ sono adiacenti.

  $\Gamma$ attraversa un iperpiano $H \in \mathcal{A}$ se $H \in \mathcal{M}(C_i, C_{i+1})$ per qualche $i$.

  $\mathcal{M}(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{M}(C_i, C_{i+1})$.

- $\underline{s} = (s_1, \dots, s_p)$, $s_i \in S$, la galleria associata a $\underline{s}$

  $\Gamma(\underline{s}) = (C_0, s_1(C_0), s_1 s_2(C_0), \dots, s_1 \cdots s_p(C_0))$

(camere adiacenti a $w(C_0)$ sono $w s_\alpha C_0$, $\alpha \in \Delta$) quindi due camere successive sono adiacenti.

$$\mathcal{M}(\underline{s}) := \mathcal{M}(\Gamma(\underline{s})) = \{ H_1, s_1(H_2), s_1 s_2(H_3), \dots, s_1 \cdots s_{p-1}(H_p) \}$$

dove $H_i$ è l'iperpiano di riflessione di $s_i$,

$$\mathcal{M}(s_1 \cdots s_k(C_0), s_1 \cdots s_k s_{k+1}(C_0)) = s_1 \cdots s_k(H_{k+1})$$

$$s_1 \cdots s_{k+1}(C_0) = (s_1 \cdots s_k s_{k+1} s_k \cdots s_1)(s_1 \cdots s_k(C_0))$$

$$s_1 \cdots s_k s_{k+1} s_k \cdots s_1 = s_{s_1 \cdots s_k(\alpha_{k+1})}$$

---

<u>Teorema</u>. $w = s_1 \cdots s_q$ una decomposizione ridotta. Sia $H_i$ l'iperpiano di riflessione di $s_i$. Sia $\underline{s} = (s_1, \dots, s_q)$. Allora:

$\# \mathcal{M}(\underline{s}) = q$ (cioè gli iperpiani elencati sopra sono tutti distinti)

e $\mathcal{M}(w) = \mathcal{M}(\underline{s})$

---

<u>dim.</u> Se gli iperpiani non fossero distinti, ad es:

$$s_1 \cdots s_{k-1} H_k = s_1 \cdots s_{l-1} H_l \quad , k < l ,$$

quindi

$$H_k = s_k \cdots s_{l-1} H_l \quad \text{da cui:}$$

$$s_k = s_k \cdots s_{l-1} s_l s_{l-1} \cdots s_k \Rightarrow s_k \cdots s_l = s_{k+1} \cdots s_{l-1}$$

e potrei accorciare l'espressione di $w$, che non sarebbe ridotta.

$\Gamma(\underline{s}) = (C_0, s_1 C_0, \dots, w.(C_0))$ attraversa i muri $M(\underline{s})$ una e una sola volta. Quindi:

$$m(\Gamma(\underline{s})) = m(\underline{s}) = m(C_0, w(C_0)) = m(w). \qquad \blacksquare$$

<u>Corollario</u>. $m(w) = \ell(w)$.

---

$(W, S)$

Grafo di Coxeter $\Gamma$. vertici: $V\Gamma \longleftrightarrow S$

è un grafo con lati pesati. lati: $E\Gamma \longleftrightarrow (s, s')$ con peso $m(s,s')$

se $m(s,s') = 2$ (cioè $ss' = s's$) non si mette nessun lato;
(non si scrive il peso se $m(s,s') = 3$).

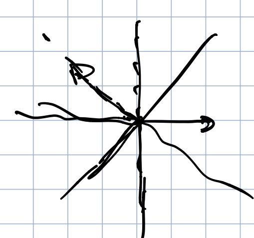
Presentazione $\longleftrightarrow$ Grafo

<u>Es 1</u>. tipo $I_2(m)$ $\quad \circ \overset{m}{—} \circ \quad (m \geq 2)$

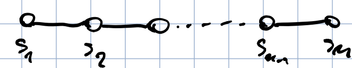
$$W = \langle s_1, s_2 \mid s_i^2 = 1, (s_1 s_2)^m = 1 \rangle$$

$$\Phi = \left\{ \pm \left( \cos \frac{\pi k}{m}, \operatorname{sen} \frac{\pi k}{m} \right), \ k = 0, \dots, m-1 \right\}$$

$$\Delta = \left\{ (1,0), \left( \cos \frac{m-1}{m}\pi, \operatorname{sen} \frac{m-1}{m}\pi \right) \right\}$$



Es 2  tipo $A_n$




$W = \mathfrak{S}_{n+1}$

$$\langle s_1,\dots,s_n \mid s_i^2=1,\ s_is_j = s_js_i \text{ se } |i-j|\ge 2,\ s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1} \rangle$$

$(s_is_j)^2=1$

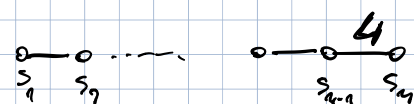
$(s_is_{i+1})^3=1$

$s_i=(i,i+1)$  $\Phi=\{\pm(\varepsilon_i-\varepsilon_j),\ i<j\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$

$\#\Pi = \binom{n+1}{2}$  $\Delta=\{\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1},\ i=1,\dots,n\}$

$(A_2 \leftrightarrow I_2(3))$

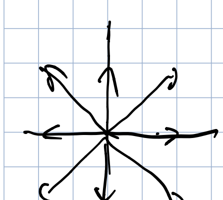
2) tipo $B_n$




$$W=\langle s_1,\dots,s_n \mid s_i^2=1,\ s_is_j=s_js_i\ |i-j|\ge 2,\ s_is_{i+1}s_i=s_{i+1}s_is_{i+1}\ i=1,\dots,n-2,\ (s_{n-1}s_n)^4=1 \rangle$$

$s_{n-1}s_ns_{n-1}s_n = s_ns_{n-1}s_ns_{n-1}$

$$\Phi=\{\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j),\ i<j,\ \ \varepsilon_i,\ i=1,\dots,n\}$$



$(B_2 \leftrightarrow I_2(4))$

$$\Delta=\{\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1},\ i=1,\dots,n-1,\ \alpha_n=\varepsilon_n\}$$

$\varepsilon_i-\varepsilon_j = \alpha_i+\dots+\alpha_{j-1}$

$\varepsilon_i = \alpha_i+\dots+\alpha_{n-1}+2\alpha_n$

es: scrivere le radici in $\Pi$ tramite $\Delta$

$$\varepsilon_i + \varepsilon_j = \alpha_i + \dots + \alpha_{j-1} + 2(\alpha_j + \dots + \alpha_{n-1} + 2\alpha_n)$$

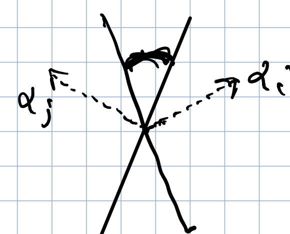
Dato $\Gamma$ grafo di Coxeter, con vertici $s_1, \dots, s_n \in S$ associamo la matrice:

$$A = \left( a(s,s') = -\cos \frac{\pi}{m(s,s')} \right)$$

se $\Gamma = \Gamma_W$ con $W$ finito,

$\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ che dà la presentazione di Coxeter, allora

$$\widehat{\alpha_i, \alpha_j} = \pi - \frac{\pi}{m(i,j)}$$




Segue

$$(\alpha_i, \alpha_j) = -\cos \frac{\pi}{m(i,j)}$$

__Segue__: se $\Gamma_W$ è associato a un gruppo di riflessioni finito $\Rightarrow$ $A > 0$ (definita positiva)

---

__Def.__ $W$ irriducibile se $\Gamma_W$ è connesso.

__Oss.__ $\Gamma_W = \Gamma_1 \sqcup \dots \sqcup \Gamma_K$ componenti connesse, se

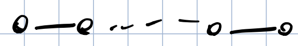
$S_i = V\Gamma_i$ (vertici), $S = \bigcup S_i$, allora si ha che
$W = W_1 \times \dots \times W_K$, con $W_i$ sottogr. gen. da $S_i$.

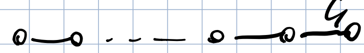
---

Si fa la classificazione dei gruppi di rifless. irriducibili finiti.

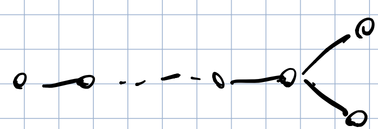
(Manca una lista di grafi)

Lista di grafi irriducibili

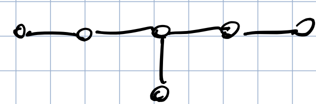
1) $A_n$  $n \geq 1$

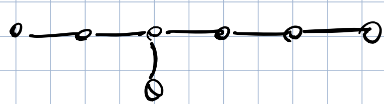
2) $B$ 

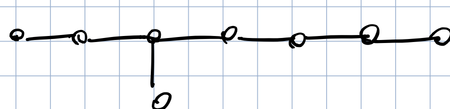
$n \geq 2$

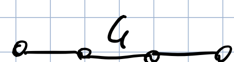
3) $D_n$  $n \geq 4$

casi eccezionali

4) $E_6$ 

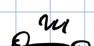
5) $E_7$ 

6) $E_8$ 

7) $F_4$ 


8) $H_3$ 


9) $H_4$ 


10) $I_2(m)$ 


---

Classificazione: per ogni caso, produrre un gruppo di riflessioni

Per vedere che i grafi sopra sono gli unici t.c. la matrice $A$ associata è $> 0$.

2) $W_{B_n} = \mathbb{Z}_2^n \rtimes \sigma_n$ $\qquad$ $\mathbb{Z}_2^n$ riflessioni rispetto $\varepsilon_i$

cambiano un segno

es. calcolare $\# \Pi$

3) $D_n$: $\Phi = \{ \pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j), \ i < j \}$ $\qquad$ $\# \Pi = n(n-1)$

$$\Delta = \{ \alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \ i = 1, \dots, n-1, \ \alpha_n = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n \}$$

$\varepsilon_i - \varepsilon_j = \alpha_i + \dots + \alpha_{j-1}$ $\qquad$ $\varepsilon_i + \varepsilon_j$

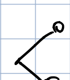
$$\varepsilon_i + \varepsilon_{n-1} = \alpha_i + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n$$
$$\varepsilon_i + \varepsilon_n = \alpha_i + \dots + \alpha_{n-2} + \alpha_n$$

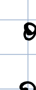
$$\varepsilon_i + \varepsilon_j = \alpha_i + \dots + \alpha_{j-1} + 2(\alpha_j + \dots + \alpha_{n-2}) + \alpha_{n-1} + \alpha_n \qquad j \le n-2$$

$\mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes \sigma_n$ $\qquad$ dove $\mathbb{Z}_2^{n-1}$ corrisponde alle

scelte di segno "pari".

verificare che il grafo associato a $\Delta$ è quello disegnato

$\left( (\alpha_n, \alpha_{n-1}) = 0 \right.$  $)$

$n = 2$  $A_1 \times A_1$

$n = 3$  $= A_3$ $\left. \right)$

4) $E_6$ : $V \subset \mathbb{R}^8$ $\quad V = \{ \underline{x} = (x_1, \dots, x_8) \mid x_6 = x_7 = -x_8 )$

$\Phi = \{ \pm(\varepsilon_j \pm \varepsilon_i) \quad , 1 \le i < j \le 5 ,$

$\quad \pm \frac{1}{2} \left( \varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \sum_{i=1}^{5} (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i \right) \}$ $\qquad \nu(i) = 0,1$

$\sum \nu(i)$ pari

es:

$\# \Pi = 32$

$\Delta =$ $\quad \alpha_1 = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_1 + \varepsilon_8 - ( \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_7 ) \right)$

$\alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$\alpha_i = \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_{i-2} \qquad i = 3, \dots 6.$

eserc: esprimere le radici positive tramite $\Delta$.

es: caso $H_3$  gruppo dell'icosaedro $\equiv$

$\cong$ del dodecaedro

- i grafi $\Gamma$ nelle liste sono i soli di tipo positivo.

<u>Lemma</u>. Se $\Gamma$ è $> 0$, ogni sottografo $\Gamma'$ di $\Gamma$ è $> 0$.

<u>def</u>. un sottografo $\Gamma'$ è ottenuto scegliendo un insieme di vertici e tutti i lati che li collegano, con pesi $m' \le m$ su ogni lato.

$S = V\Gamma$, sia $T \subset S$. Se $i, j \in T$, $2 \le m'_{ij} \le m_{ij}$

dove $m'_{ij}$ i pesi di $\Gamma'$.

$$0 \geq a'_{ij} = -\cos\frac{\pi}{m'_{ij}} \geq a_{ij} = -\cos\frac{\pi}{m_{ij}}$$

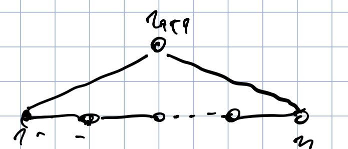
$n = \# S$ $\quad \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad x_i = 0$ se $i \notin T \quad (|x_1|, \dots, |x_n|)$

$$0 < \sum_{i \in T} |x_i|^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij} |x_i||x_j| \leq \sum_{i \in T} x_i^2 + \sum_{i \neq j} a'_{ij} |x_i||x_j|$$

$$\leq \sum_{i \in T} x_i^2 + \sum_{i \neq j} a'_{ij} x_i x_j$$

$\square$

Ad esempio:

es: $\Gamma =$ 


ciclo. $\Gamma$ non è $> 0$ (è $\geq 0$)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ & & & \ddots & & \\ -\frac{1}{2} & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

somma delle colonne $= 0$

<u>Coroll.</u> Se $\Gamma > 0 \Rightarrow \Gamma$ non ha cicli (è un albero)

---

Gruppi cristallografici: sono i $W$ che stabilizzano un reticolo $\left( \left\{ \sum_{i=1}^{n} n_i \gamma_i, \ n_i \in \mathbb{Z}, \ \gamma_1, \dots, \gamma_n \text{ base di } \mathbb{R}^n \right) \right.$

**def.** Un sistema $\Phi$ di radici è cristallografico se

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} \in \mathbb{Z} \qquad \forall \alpha,\beta \in \Phi.$$

si vede quindi che se $\Phi$ è cristallografico $\Rightarrow$ $W$ stabilizza il reticolo $\mathbb{Z}\Delta = \{\sum n_\alpha \alpha \;,\; \alpha \in \Delta \;,\; n_\alpha \in \mathbb{Z}\}$

<u>**Lemma**</u> Se $W$ è cristallografico $\Rightarrow$ $m(s,s') \in \{2,3,4,6\}$.

nella lista sopra $H_3, H_4, I_2(m)$, $m > 3$, non sono cristallografici

$\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi$, $\Phi \cap \mathrm{Span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots$ estendiamo a base di $\mathbb{R}^n$, $v_3, \dots, v_n$ siano ortogonali a $\alpha_1, \alpha_2$.

$$(s_{\alpha_1} s_{\alpha_2})^{m(\alpha_1,\alpha_2)} = 1$$

rotazione di angolo $\frac{2\pi}{m}$

$$M(s_{\alpha_1} s_{\alpha_2}) = \left[\begin{array}{cc|ccc} \cos\frac{2\pi}{m} & * & & & \\ * & \cos\frac{2\pi}{m} & & 0 & \\ \hline & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right]$$

traccia $= 2\cos\frac{2\pi}{m} + (n-1)$

Se la calcolo rispetto a una base dello del reticolo $\Delta$ $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Delta$, per definizione la matrice è a coeff. interi se ne deduce che

$$2\cos\frac{2\pi}{m} \in \mathbb{Z} \qquad \Rightarrow m \in \{2,3,4,6\}$$