G $\qquad X = K(G,1) \qquad \pi_1(X) = G, \quad \pi_i(X) = 0$

1) $G = \mathbb{Z} \qquad K(\mathbb{Z},1) \qquad X = S^1$

$G = \mathbb{Z}^n \qquad K(G_1,1) \times K(G_2,1) = K(G_1 * G_2, 1)$

$$K(\mathbb{Z}^n,1) = (S^1)^n$$

2) $G = \mathbb{Z}_2 \qquad K(\mathbb{Z}_2,1) = \mathbb{RP}^\infty \qquad \pi_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}_2 \qquad \pi_2(\mathbb{RP}^2) = \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd} & & S^n \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\subset \cdots \subset"] & S^\infty \arrow[d] & S^2 \arrow[d] \\ \mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{RP}^2 \subset \cdots \arrow[r, phantom, "\subset"] & & \mathbb{RP}^n \arrow[r, phantom, "\subset \cdots \subset"] & \mathbb{RP}^\infty & \mathbb{RP}^2 \end{tikzcd}$$

una k-cella $\forall k$

$K(\mathbb{Z}_m,1) \qquad S^{2m-1} = \{(z_1,\dots,z_m) \in \mathbb{C}^m \mid \sum |z_i|^2 = 1\}$

$\xi_m = e^{\frac{2\pi i}{m}} \qquad \xi_m z = (\xi_m z_1, \dots, \xi_m z_m) \qquad \boxed{\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}}$

$$\begin{tikzcd} S^{2m-1} \arrow[d] & S^{2m+1} \arrow[d] \arrow[r, dash, dashed] & & S^\infty \arrow[d] \\ S^{2m-1}/\mathbb{Z}_m = L_m^{2m-1} \arrow[r, hook] & L_m^{2m+1} \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & L_m^\infty = K(\mathbb{Z}_m,1) \end{tikzcd}$$

Def. G discreto. Si definisce omologia e coomologia di G come l'omologia e la coomologia di $K(G,1)$

$$H_i(G;\mathbb{Z}) = H_i(K(G,1);\mathbb{Z})$$

$$H^i(G;\mathbb{Z}) = H^i(K(G,1);\mathbb{Z})$$

Ritorniamo a $\tilde{Y}_\alpha$, Y_α $\qquad$ Teo Y_α è $K(\pi,1)$.

oss. Y_W è $K(\pi,1) \iff \tilde{Y}_W$ è $K(\pi,1)$

Es 1) $\hat{Y}_W = (\mathbb{C}_*)^n$ è ovviamente un $K(\pi,1)$. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}_*$ è riv. universale $\mathbb{C}^n \to (\mathbb{C}_*)^n$.

Es 2) $\hat{Y}_W = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i,j} \{z_i = z_j\} = Y_n$

Consideriamo la proiezione

$$Y_n \ni z = (z_1, \dots, z_n) \xrightarrow{\pi} (z_1, \dots, z_{n-1}) \in Y_{n-1}$$

Teorema $\pi : Y_n \to Y_{n-1}$ è un fibrato localmente banale con fibra $F = \mathbb{C} \setminus \{1, \dots, n\}$.

Fibrati localmente banali.

def. Il fibrato banale su B con fibra F è il prodotto $E = B \times F$, con $\pi : E \to B$ sul primo fattore (quindi $\pi^{-1}(b) = \{b\} \times F$)

Un fibrato localmente banale è una quaterna

$$\xi = (E, p, B, F)$$

con E, B, F sp. topologici e $p : E \to B$ continua t.c. $\exists$ ricoprimento $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ t.c. $\forall \alpha$ si ha omeomorfismo

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\psi_\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & & U_\alpha \times F \arrow[dl, "\pi"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

commutativo

$\psi_\alpha(p^{-1}(b)) \cong \{b\} \times F$

notiamo:

$$\psi_\beta \psi_\alpha^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$$

ha la forma:

$$(x,y) \longrightarrow (x, g_{\beta\alpha}(y))$$

$g_{\alpha\beta} \in \mathrm{Homeo}(F)$.

Su $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ si ha:

$$(\psi_\gamma \psi_\beta^{-1})(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})(x,y) = (x, g_{\gamma\beta}\, g_{\beta\alpha}(y))$$

$$\psi_\gamma \psi_\alpha^{-1}(x,y) = (x, g_{\gamma\alpha}(y))$$

$g_{\gamma\alpha} = g_{\gamma\beta}\, g_{\beta\alpha}$ $\quad \forall \alpha, \beta, \gamma$, (condizione di cociclo)

<u>morfismo</u> ξ, ξ' con le stesse fibre F è una mappa $f: E \to E'$ t.c. $p(e)=p(e') \Rightarrow p' f(e) = p' f(e')$ (cioè f manda fibre in fibre) e $f|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \xrightarrow{\cong} (p')^{-1}(p'(f(e)))$, $e \in p^{-1}(b)$, è omeomorfismo

Quindi f induce una mappa

$$\bar{f}: B \to B' \qquad \bar{f}(b = p(e)) = p'(f(e))$$

Un isomorfismo sarà detto che un morfismo f t.c. f e $\bar{f}$ sono omeomorfismi.

Gruppo strutturale $G \subset \mathrm{Homeo}(F)$. Si richiede che $g_{\beta\alpha} \in G$.

<u>es.</u> - Fibrati vettoriali: $F = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, $g_{\beta\alpha} \in GL_n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

- $B = S^1$ $\quad F = \mathbb{R}$ $\quad E = S^1 \times \mathbb{R}$

nastro di Moebius

- fibrato tangente di una varietà M $\quad$ es: TS^1 è banale

TS^2 non è banale

- fibrato normale $M \hookrightarrow N$ $\quad$ sottovarietà $\quad TM \subset TN$

$TM^\perp \subset TN$, $TM^\perp = \bigcup_{x\in M} TM_x^\perp$

- fibrato in sfere $S^1 \hookrightarrow S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$

$$\begin{array}{c} S^1 \hookrightarrow S^3 \\ \downarrow \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = S^2 \end{array}$$

- G gruppo topologico. Fibrato principale: $F = G$, gruppo strutturale è G e agisce per moltiplicazione.

pull-back

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

$\xi = (E, p, B, F)$

$E' = \{ (x,e) \in X \times E \mid f(x) = p(e) \} \xrightarrow{p'} X$ proiezione sul 1° fattore

$\xrightarrow{f'} E'$ proiez. sul 2° fattore

es: se $\{U_\alpha\}$ è un ricopr. banalizzante per $\xi \Rightarrow \{f^{-1}(U_\alpha)\}$ è ricoprim. banalizzante per $\xi' = (E', p', X, F)$

$$Y_n \ni (z_1, \dots, z_n) \xrightarrow{\pi} (z_1, \dots, z_{n-1}) \in Y_{n-1}$$

è un fibrato localmente banale con fibra $F = \mathbb{C} \setminus \{1, \dots, n-1\}$.

oss $\pi^{-1}(z_1, \dots, z_{n-1}) = \{ (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) \mid z_n \in \mathbb{C},\ z_n \neq z_i,\ i = 1, \dots, n-1 \}$

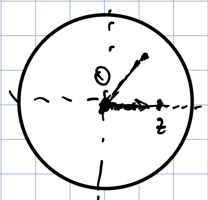
dim. $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$, $\varepsilon = \frac{1}{2} \min \{ |z_i - z_j| \}$ e sia

$U_{z'} = \{ w = (w_1, \dots, w_{n-1}) \mid |w_i - z_i| < \varepsilon \}$

Verifica continuità $\tilde{\Phi} : U_{z'} \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U_{z'})$ omeomorfismo .

Lemma $D = \{ |z| \leq 1 \} \subset \mathbb{C}$, $z \in \mathrm{int}(D)$.

Allora $\exists\ \varphi_z : D \to D$ diffeo. , con $\varphi|_{\partial D} = id$,
$\varphi_z(0) = z$, φ_z dipende differenziabilmente da z.



dim $V(x,y) = (1-x^2-y^2)\, k\, e_1$ · $k \geq 0$; se $z \in$ asse x

$\tilde{\Phi} : D \times I \to D$ FLUSSO di V $\qquad \frac{d}{dt}\Phi_t(x,y) = V(\Phi_t(x,y))$

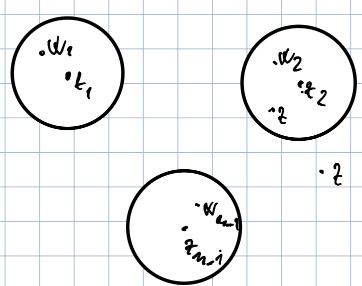
$\Phi_0(x,y) = (x,y)$

$V(x,y) = (1-x^2-y^2) \cdot k(x_0,y_0)$ se $z = x_0 + iy_0$.

Si pone $\varphi_z = \Phi_1$

---

omeomorfismo tra $\tilde{\Phi} : U_{z'} \times \pi^{-1}(z') \xrightarrow{\simeq} \pi^{-1}(U_{z'})$



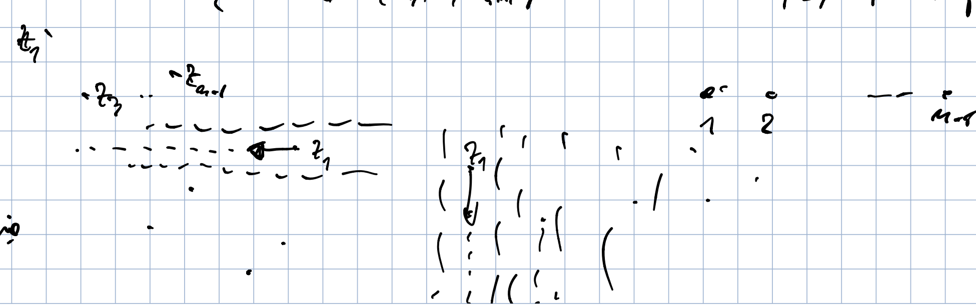
$$\tilde{\Phi}((w_1,\dots,w_{n-1}),(z_1,\dots,z_{n-1},z)) =$$

$$= \begin{cases} (w_1,\dots,w_{n-1},z) & \text{se } \min_i\{\mathrm{dist}(z,z_i) \geq \varepsilon\} \\ (w_1,\dots,w_{n-1},\varphi_{w_i}(z)) & \text{se } \mathrm{dist}(z,z_i) < \varepsilon \end{cases}$$

è un omeomorfismo tra $U_{z'} \times \pi^{-1}(z') \xrightarrow{\simeq} \pi^{-1}(U_{z'})$.

Per ottenere la tesi, basta considerare un diffeomorfismo tra $\pi^{-1}(z') \cong F$

es: $\cdot z_2$ $\quad \mathbb{C} \setminus \{z_1,\dots,z_{n-1}\} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C} \setminus \{1,\dots,n-1\}$



esempio

Corollario Y_n è uno spazio di tipo $K(\pi,1)$.

dim. Deriva per induzione dalla successione esatta di omotopia del fibrato.

Teorema. Se $E \xrightarrow{p} B$ fibrato loc. ban. a fibra F. Allora si ha una succ. esatta lunga:

$$\to \pi_i(F) \to \pi_i(E) \to \pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F) \to \cdots \to \pi_1(F) \to \pi_1(E) \to \pi_1(B) \to \pi_0(F)$$

Cor. Se B e F sono $K(\pi,1) \Rightarrow E$ lo è

dim per $i \geq 2$ $\pi_i(E) = 0$ poiché $\pi_i(F) = \pi_i(B) = 0$ □

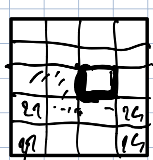
---

def Un *fibrato di Serre* è una terna $\xi = (E, p, B)$, $p: E \to B$, che ha la proprietà del *sollevamento dell'omotopia* per i cubi I^n:

se $f: I^n \to E$, e $F: I^n \times I = I^{n+1} \to B$ con $F|_{I^n \times \{0\}} = p \circ f$, allora $\exists\ \hat{F}: I^n \times I \to E$ con $\hat{F}|_{I^n \times \{0\}} = f$, e $p \circ \hat{F} = F$.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d, mapsto] & I^n \arrow[r, "f"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
(x,0) & I^n \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\hat{F}"] & B
\end{tikzcd}$$

Lemma (località) Se $\forall\, b \in B$, $\exists\ U_b \ni b$ t.c. $(p^{-1}(U_b), p|_{p^{-1}(U_b)}, U_b)$ è di Serre $\Rightarrow$ ξ è di Serre dim Siano f, F come sopra. $\forall x \in I^{n+1}$, $F(x) \in U_{F(x)}$ con $\xi|_{U_{F(x)}}$ di Serre. Essendo I^{n+1} compatto, posso ricoprire con # finito di $F^{-1}(U_y)$. $\exists$ un numero $\delta > 0$ t.c. $\forall$ ipercubo $c \subset I^{n+1}$ di lato $< \delta$, è contenuto in uno degli aperti $F^{-1}(U_y)$, cioè $\xi|F(c)$ è di Serre. Dividiamo il lato del cubo I^{n+1} in N parti uguali, con $\frac{1}{N} < \delta$, cioè ho N^{n+1} ipercubi. Indicizziamo questi ipercubi



secondo l'ordine lessicografico delle coordinate del vertice di max norma $C_{i_1 \dots i_{n+1}}$ $\quad 1 \leq i_j \leq N$

$$\hat{C}_{i_1 \dots i_{n+1}} = \bigcup_{\substack{j_1 \dots j_{n+1} \\ < i_1 \dots i_{n+1}}} C_{j_1 \dots j_{n+1}}$$

oss: $C_{i_1 \dots i_{n+1}} \cap \hat{C}_{i_1 \dots i_{n+1}} =$ Unione di facce di $C_{i_1 \dots i_n} \cong I^n$

$\Rightarrow \left(C_{i_1 \dots i_{n+1}}, C_{i_1 \dots i_{n+1}} \cap \hat{C}_{i_1 \dots i_{n+1}} \right) \cong \left(I^{n+1}, I^n \right)$

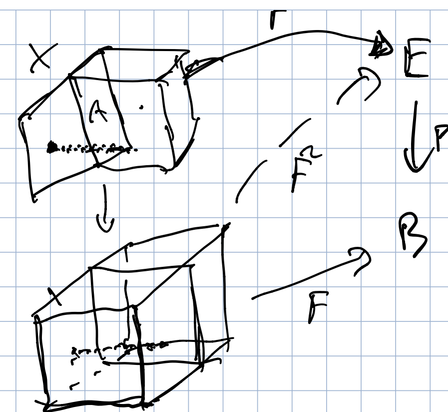
Per induzione si estende $\hat{F}$ a tutto I^{n+1} (un cubetto alla volta)

Prop Un fibrato localmente banale è di Serre.

dim Basta vederlo per un fibrato banale $B \times F \to B$. (Esercizio) $\square$

Teo Un fibrato di Serre ha la proprietà di sollevamento dell'omotopia per le coppie (X, A) di CW-complessi ($A \subset X$ sottocomplesso). Cioè: $f: X \to E$, t.c. $\hat{F}: A \times I \to E$, con $\hat{F}(x,0) = f(x)$ se $x \in A$, e $F: X \times I \to B$ t.c. $F(x,0) = p f(x)$ e $F(x,t) = p \hat{F}(x,t)$ se $x \in A$ $\Rightarrow$ $\hat{F}$ si estende a $X \times I$ e solleva F, cioè $p \circ \hat{F} = F$.

$\hat{F}$

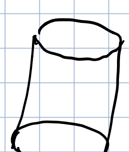


<u>dim</u>. Per ricorrenza su n, estendendo $\tilde{F}$ a $(X_n \cup A)\times I$.

Per $n=0$: se $x_0 \in X_0 \setminus A$. $t \to F(x_0,t): I \to B$ posso sollevarla a $x_0 \times I$, partendo da $f(x_0)$.

Supponendo di aver sollevato F a $(X_{n-1} \cup A)\times I$ si prende una n-cella e^n di $X \setminus A$.

$\varphi: D^n \to X_n$ funz. caratt. di e^n, $\varphi|_{\partial D^n}: S^{n-1} \to X_{n-1}$ è funz. di attaccamento.



D^n

$$(D^n \times I, \underbrace{\partial D^n \times I \cup D^n \times \{0\}}_{F \text{ già definita}}) \cong (I^{n+1}, I^n)$$

posso estendere utilizzando la def. di fibrato di Serre.

<u>Coroll</u>. Se (X,A) è come sopra, $f: X \to E$, $F: X\times I \to B$ omotopia di $p \circ f$ tale che $F(x,t)=x$ $\forall x \in A$, allora F si può sollevare a un'omotopia $\tilde{F}: X \times I \to E$, t.c. $\tilde{F}(x,t)=x$ $\forall x \in A$.

<u>dim</u>. Basta applicare il teo con $\tilde{F}(x,t)=x$, $\forall x \in A$.