$\mathcal{F}(K)$ = celle di K CW-complesso

f. di Morse $\quad f: \mathcal{F}(K) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \sigma^p < \tau^{p+1} \quad f(\tau) > f(\sigma)$ con al più 1 eccezione

$\lambda^{p-1} < \sigma^p \quad f(\lambda) < f(\sigma)$ con al più 1 eccezione

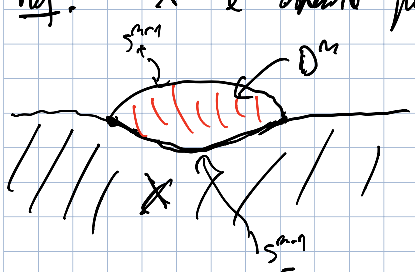
σ^p p-cella critica: no eccezioni.

---

1) $L \subset K$ sottocomplesso. $\forall f$ di Morse, $f|_L$ è di Morse.
Se σ è critica per f in $K \Rightarrow \sigma$ è critica per $f|_L$ su L.

2) Ogni f di M. su L, si estende a una f di M. su K.
Infatti: $m = \max_{\sigma \in L} \{f(\sigma)\}$. Poniamo $g(\sigma) = \cancel{m+} \dim(\sigma)$
è di M. su K, con tutte le celle $\sigma \in K \setminus L$ critiche.

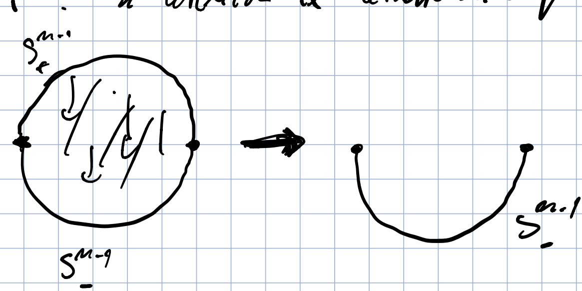
Def. X è ottenuto per collassamento elementare da Y se



$\partial D^n = S^{n-1}_+ \cup S^{n-1}_- = S^n$

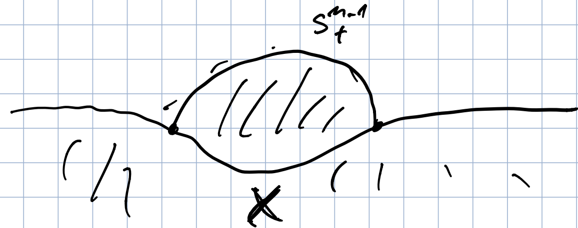
$Y = X \cup_{\varphi_-} D^n \qquad \varphi_-: S^{n-1}_- \longrightarrow X$

Oss. X è retratto di deformazione di Y: si utilizza il retratto di deformazione di D^n su S^{n-1}_-



Il collassamento è cellulare se X e Y sono CW-complessi e $\varphi_-|_{\partial S^{n-1}_+} = \varphi_-|_{\partial S^{n-1}_-}$ è la forma di attaccamento delle $(n-1)$-celle

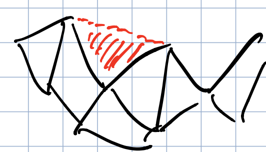
S^{n-1}_+



poi attacchiamo D^n $\quad S^{n-1} = S^{n-1}_+ \cup S^{n-1}_-$ con φ_- su S^{n-1}_- e

inclusione di $S^{n-1}_+ \hookrightarrow D^n \longrightarrow X \coprod_{\varphi_-} D^n \to Y$

es: caso simpliciale



notazione:

$K \searrow L$ $\quad K \supset L$ CW-complessi, K collassa su L, se $\exists$ successione di collassamenti elementari che fa passare da K a L.

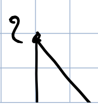
Prop $L \subset K$ sottocomplesso e $f : \mathcal{F}(L) \to \mathbb{R}$ f. di Morse. Se $K \searrow L$ allora f si estende a una f. di M. su K senza celle critiche al di fuori di L.

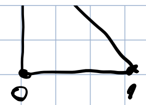
dim. $K = K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_m = L$. Se $m = 0$ ovvio. Basta per $m = 1$. $\quad K = L \cup_{\varphi_-} D^n$. $\quad K$ ha 2 celle in più $\quad \mathring{S}^{n-1}_+ = \tau$,

$\mathring{D}^n = \sigma$. $\quad$ Se $\quad m = \max_{\sigma \in L} f(\sigma)$.

$g = f$ su L, $\quad g(\tau) = m+2$, $\quad g(\sigma) = m+1$. $\quad$ —

$\Delta^n =$ vertici $\{0, \dots, n\}$ $\quad$ facce: tutti i sottinsiemi.



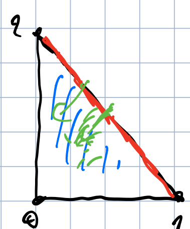


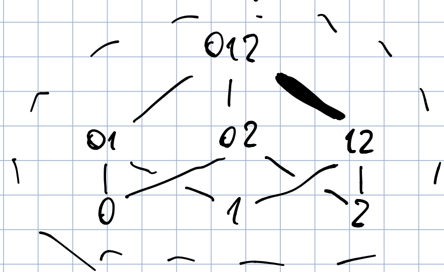
$\exists$ f di M. con una sola cella (di dim 0) critica quindi Δ^n collassa a un suo vertice.

$$\sigma^n = (j_0 < \dots < j_k) \subset \tau^{n+1} = (0 < j_0 < \dots < j_k) \qquad j_i \in \{0, \dots, n\}$$

$$j_0 > 0$$

queste coppie sono quelle che danno collassamenti elementari, partendo da quelle più alte in ordine lessicografico. $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$

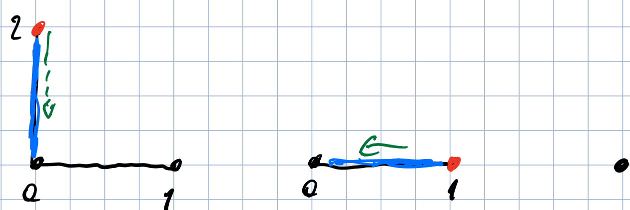




$(1,2) - (0,1,2)$

$(2) - (0,2)$

$(1) \to (0,1)$



esempio:
$f(0) = 0$, estendo f a Δ^n senza altre celle critiche.

$$\sigma = (j_0 < \dots < j_n) \qquad j_0 > 0$$

$f(\sigma) = 2 \cdot$ posizione di σ nell'ordine lex tra i sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$

$$\tau = (0 < j_0 < \dots < j_k) \qquad f(\tau) = f(\sigma) - 1$$

esempio 2 $\quad \partial \Delta^n \quad$ tutti i sottoinsiemi di $\{0, \dots, n\}$ eccetto il sottoinsieme $\{0, \dots, n\}$.

ha una f. di M. con 2 sole celle critiche 0-celle
(n-1)-celle

infatti $\partial\Delta^n \setminus \{1,\dots,n\} \searrow \{0\}$ (come prima)

$\Rightarrow \exists f$ di M. con 0 come unica cella critica. Estendo a $\partial\Delta^n$ $f(\{1,\dots,n\}) = m+1$ $m = \max_{\sigma} f$ su $\partial\Delta^n \setminus \{1,\dots,n\}$

Def. L'<u>accoppiamento</u> (matching) definito da f di M. discreta è l'insieme

$$V(f) = \{(\tau^{p+1} > \sigma^p) \mid f(\tau^{p+1}) \leq f(\sigma^p)\}$$

oss. Per definizione e per il lemma visto la volta scorsa, ogni $\sigma \in K$ non critica appartiene a 1 e 1 sola coppia di $V(f)$.

Def. $P, <$ un poset. Un matching in P è un sottoinsieme $M \subset P \times P$ t.c.

(i) $(a,b) \in M \Rightarrow a \triangleright b$ (a copre b: $\nexists c : a \gneq c \gneq b$)

(ii) $\forall a \in P$, a è contenuto in al più 1 coppia di M.

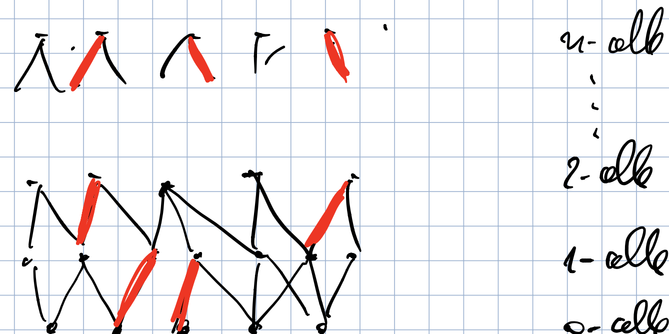
Nel caso $P = \mathcal{F}(K)$, $\sigma < \tau$ se σ è faccia di τ, il matching M si chiama <u>campo di vettori discreto</u>. Se $M = V(f)$, f fun. di M. discreta, si dice <u>campo gradiente</u>.

diagramma di Hasse:

è un grafo, con vertici $= P$

e lati (a,b), $a \triangleright b$.

M: insieme di lati disgiunti



Def. M matching su P, $<$

Un *cammino alternante* di M è una successione finita:

$$\tau_0 > \sigma_1 < \tau_1 > \sigma_2 < \tau_2 > \cdots > \sigma_k < \tau_k > \sigma_{k+1} \cdots$$

tale che $(\sigma_i < \tau_i) \in M$, $\forall i$, $\sigma_{i+1} \neq \sigma_i$

$\sigma_i < \tau_i \in M$, $\tau_i > \sigma_{i+1}$ non sta in M.

$P = \mathcal{F}(K)$, il cammino oscilla tra due dimensioni $p, p+1$.

Orientiamo il diagramma di Hasse orientando ogni lato $a > b$: $a \to b$

Dato M, cambiamo l'orientazione ai lati $a > b \in M$ $a \leftarrow b$

Chiameremo il grafo Γ_M.

Def. Un matching M è *aciclico* se non possiede cammini alternanti chiusi

$$\sigma_1 < \tau_1 > \sigma_2 < \tau_2 \cdots < \tau_n > \sigma_1$$

$P = \mathcal{F}(K)$

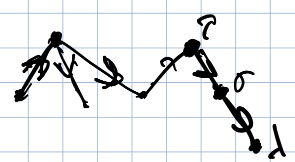
Dato un grafo orientato Γ, un cammino (orientato) è un cammino che rispetta l'orientazione. Γ è aciclico se non ci sono cammini chiusi.

Teorema 1 M è aciclico $\iff$ Γ_M è aciclico

$\Leftarrow$ ovvio perché un cammino alternante è un particolare cammino orientato di Γ_M.

$\Rightarrow$ I cammini di Γ_M che non sono alternanti non si chiudono: se c cammino orientato che non è alternante $\Rightarrow$

ha due lati consecutivi che non stanno in M : $\tau^{p+1} > \sigma^p > \lambda^{p-1}$.



La dimensione è calata di 2, e non posso più risalire di 2 la dimensione, non essendoci 2 lati consecutivi in M. ∎

<u>Teorema 2</u> Un matching M su $\mathcal{H}(K)$ è con campo gradiente ($M = V(f)$, f di M.) $\iff$ è aciclico.

$\Rightarrow$) $M = V(f)$, f di M.

c : $\sigma_1^p < \tau_1^{p+1} > \sigma_2^p < \tau_2^{p+1} > \dots > \sigma_n^p < \tau_n^{p+1} > \sigma_{n+1}^p$

$\sigma_1^p < \tau_1^p \in V(f) \Rightarrow$
$f(\sigma_1)^p \geq f(\tau_1^{p+1})$

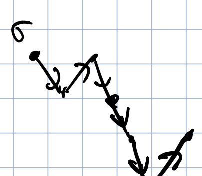
$\tau_1^{p+1} > \sigma_2^p \notin V(f) \Rightarrow f(\tau_1^{p+1}) > f(\sigma_2^p)$

$\Rightarrow f(\sigma_1^p) > f(\sigma_2^p)$

andando avanti così, $f(\sigma_1^p) > f(\sigma_2^p) > \dots > f(\sigma_{n+1}^p)$
quindi il cammino non può chiudersi.

$\Leftarrow$ Γ_M aciclico. $\forall \sigma \in K$ definisco

$f(\sigma)$ = max lunghezza di un cammino orientato uscente da σ.



Essendo Γ_M aciclico, non ci sono cammini orientati chiusi.
Notiamo che se prendo un lato di Γ_M :

$a \to b$, si ha ovviamente $f(a) > f(b)$. $\quad (*)$

Verifichiamo che:

- f è di Morse;
- $V(f) = M$.

- Data σ^p: per come è fatto Γ_M, i lati del tipo $\tau^{p+1} > \sigma^p$ sono orientati da $\tau^{p+1} \to \sigma$ eccetto al più uno (quello che sta in M) e i lati del tipo $\sigma^p > \lambda^{p-1}$ sono tutti orientati $\sigma^p \to \lambda^{p-1}$ eccetto al più uno (che sta in M), e quindi per $(*)$ gli assiomi per f. di M. sono verificati.
- Che $V(f) = M$ deriva ancora subito da $(*)$ ∎

oss. Dato un M aciclico, $\exists \infty$ f di M. t.c. $M = V(f)$.

- σ critica per $f \Leftrightarrow \sigma$ non appartiene a nessuna coppia in $V(f)$
- possiamo "partire" da un M aciclico, definire le celle critiche come le $\sigma \notin M$

Ricordiamo che K si dice <u>regolare</u> se le funzioni caratteristiche sono omeomorfismi. In generale:

<u>Teorema</u>. K CW-complesso regolare, M campo gradiente su $\mathcal{H}(K)$

Sia $c_i = \#$ i-celle critiche di K.

i) Se le celle critiche $K_c \subset K$ formano un sottocomplesso allora $K \searrow K_c$

ii) In generale, K è omot. equivalente a un complesso K_c avente c_i celle di dim i, che corrispondono alle celle critiche di K

$K_c \ni \tilde{\sigma}^i_j \longleftrightarrow \sigma^i_j \in K$

iii) Orientate tutte le celle di K. Allora gli indici di incidenza delle celle di K_c si trovano come:

$$[\hat{\tau}^p : \hat{\sigma}^{p+1}] = \sum_c w(c)$$

dove la somma è su tutti i cammini alternati:

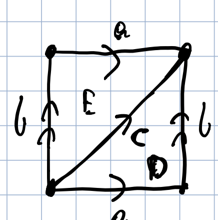
$$c = \sigma^{p+1} \searrow \tau_1^p \nearrow \sigma_1^{p+1} \searrow \tau_2^p \nearrow \sigma_2^{p+1} \searrow \cdots \searrow \tau_k^p \nearrow \sigma_k^{p+1} \searrow \tau$$

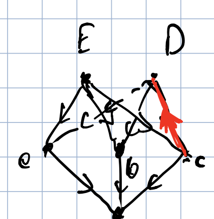
che connettono σ^{p+1} e τ^p, con

$$w(c) = (-1)^k \prod \left[\text{incidenze di tutte le coppie consecutive}\right]$$

(in K, due celle $\tau^p < \sigma^{p+1}$ hanno una incidenza $\underbrace{[\tau^p : \sigma^{p+1}]}_{=\pm 1} \in \mathbb{Z}$)

es. T^2:





$M = \{(C < D)\}$

(nota: non è regolare)