Def G gruppo, $A \subset G$ generatori. $g = g_1 \cdots g_n$, $g_i \in A$, se n minimo possibile decomposizione ridotta. $l_A : G \to \mathbb{N}$ la lunghezza.

$$l_A(gh) \le l_A(g) + l_A(h)$$

$$g \preceq_A h \iff l_A(g) + l_A(g^{-1}h) = l_A(h)$$

[$h = g \cdot (g^{-1}h)$ una decomp. ridotta di h inizia con una decomp. ridotta di g]

$$g \succeq_A h \iff l_A(g \cdot h^{-1}) + l_A(h) = l_A(g)$$

def $g \in G$ __bilanciato__ se $\forall h$ $\quad h \preceq_A g \iff g \succeq_A h$

__nota (esercizio)__ $\preceq_A$ (e $\succeq_A$) è un ordine parziale

$$l_A(g) + l_A(g^{-1}h) = l_A(h) \quad , \quad l_A(h) + l_A(h^{-1}k) = l_A(k) \Rightarrow$$

$$l_A(g) + \underbrace{l_A(g^{-1}h) + l_A(h^{-1}k)}_{\ge\, l_A(g^{-1}k)} = l_A(k)$$

$\Rightarrow$ vale $=$

antisimmetrica: ....

Def. Sia $g \in G$ bilanciato $\quad P_g = \{h \in G \mid h \preceq_A g\} = \{h \in G \mid g \succeq_A h\}$

Def. Un pre-monoide è un insieme P dove è definito un prodotto parziale, cioè $m : D \to P$, $D \subset P \times P$

__associatività__: $\forall a, b, c \in P$ $\quad ab$ definito, $(ab)c$ definito $\iff$ bc è definito e $a(bc)$ definito e sono uguali $(ab)c = a(bc)$

<u>unità</u>: $\exists\, 1 \in P,\ \forall a \in P \quad 1\cdot a = a\cdot 1 = a$

Dato un pre-monoide P, il monoide $M(P)$ generato da P
è il monoide $M(P) = \langle a \in P \mid ab = c,$ se ab è definito e vale $c \rangle$

Si può descrivere come il monoide libero generato da P (successioni finite di elem. di P, con giustapposizione) modulo la relazione generata da $(a,b) \sim (ab)$ quando ab è definito

Si ha un morfismo di pre-monoidi $\varphi : P \to M(P) : p \mapsto (p)$

<u>Prop.</u> φ è iniettivo.
<u>dim.</u> Basta far vedere che se una successione $s = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in P$, è equivalente in $M(P)$ a una succ. con un solo elemento (b), $b \in P$, allora $a_1 \cdots a_n$ è definito in P e vale b.

$s = P_0 \to P_1 \to P_2 \to \cdots \to P_h = (b)$ di tipo

$$\to (x_1, \dots, x_{i-1}, u, v, x_{i+1}, \dots, x_n) \underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftarrows}} (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$x_i = uv$

Sia h la minima possibile. Sia j l'ultima trasformazione di tipo (2)
le successive $P_j \to P_{j+1} \to \cdots$ sono di tipo (1).
Allora il prodotto della successione P_j è definito, ed è uguale a b.
Se $P_{j-1} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \longrightarrow P_j = (x_1, \dots, x_{i-1}, u, v, x_{i+1}, \dots, x_n)$, per la proprietà associativa posso iniziare moltiplicando gli elementi u, v, ritrovando P_{j-1}, quindi trovo una successione con meno di h passaggi che fa passare da s a (b). ∎

Torniamo a P_g, $g \in G$. Specifichiamo $D \subset P \times P$ in cui il prodotto è definito.

$$D = \{ (a,b) \in P \times P \mid ab \in P \ , \ l_A(a) + l_A(b) = l_A(ab) \}$$

Allora P_g è associativo.

<u>Lemma</u> $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$, $\quad l_A(g_1) + l_A(g_2) + l_A(g_3) = l_A(g_1 g_2 g_3)$

$\iff l_A(g_1) + l_A(g_2) = l_A(g_1 g_2)$, e $l_A(g_1 g_2) + l_A(g_3) = l_A(g_1 g_2 g_3)$

(e le stesse sulle destre ..)

$\Rightarrow \ l(g_1 g_2 g_3) \leq l(g_1 g_2) + l(g_3) \Rightarrow l(g_1 g_2) \geq l(g_1 g_2 g_3) - l(g_3)$
$\qquad = l(g_1) + l(g_2)$

vale anche nell'altro senso $\Rightarrow \ l(g_1 g_2) = l(g_1) + l(g_2)$.

La seconda segue subito.

$\Leftarrow \quad l(g_1 g_2 g_3) = l(g_1 g_2) + l(g_3) = l(g_1) + l(g_2) + l(g_3)$ ∎

<u>dim associatività:</u>

$a, b, c \in P_g$, $\quad ab$ e $(ab)c$ sono definiti in P_g.

$\Rightarrow \ l(ab) = l(a) + l(b), \quad l(abc) = l(ab) + l(c) \Rightarrow l(a) + l(b) + l(c) = l(abc)$

per il lemma $\Rightarrow \ l(abc) = l(a) + l(bc) \quad$ e $\quad l(bc) = l(b) + l(c)$

quindi bc e $a(bc)$ sono definiti (e vale ovviamente $(ab)c = a(bc)$) ∎

<u>Def.</u> Un pre-monoide è **M**-cancellativo se $\forall m \in M(P)$,
$\forall p, q \in P \qquad pm = qm$ oppure $mp = mq \Rightarrow p = q$

<u>Lemma</u> G, A come sopra, g bilanciato $\Rightarrow P_g$ è M-cancellativo.

<u>dim.</u> Si ha: $\pi : M(P_g) \to G$ morfismo perché le relazioni che definiscono $M(P_g)$ valgono in G. $\Rightarrow \quad pm = qm \Rightarrow \pi(p)\pi(m) = \pi(q)\pi(m)$
$\Rightarrow \pi(p) = \pi(q)$.

Ma $\quad P_g \to M(P_g) \xrightarrow{\pi} G \quad$ è l'identità ristretta a P_g ∎

Def. Un pre-monoide di Garside è un pre-monoide associativo e mitrno, con un peso $\lambda : P \to \mathbb{N}$, $\lambda(p) > 0$ se $p \neq 1$, $\lambda(ab) \geq \lambda(a) + \lambda(b)$

- M-cancellativo
- $\forall a, b \in P$, se a e b hanno multipli destri $\Rightarrow$ hanno mcm-destro in P
  + extra condizione.

Teorema. P pre-monoide di Garside t.c. tutti gli elementi hanno mcm destro $\Rightarrow$ $M(P)$ è monoide di Garside

Teorema G, A come sopra, $g \in G$ bilanciato, $A \subset P_g$ e tutte le coppie $a, b \in A$ abbiano mcm sinistro e destro in P_g. Allora P_g è pre-monoide di Garside $\Rightarrow$ $M(P_g)$ è di Garside.

[note: se $(P_g, \preceq_A)$, e $(P_g, \succeq_A)$ sono reticoli ($\exists$ mcm, gcd) le condizioni sono soddisfatte]

Se W gruppo di riflessione finito, $\delta \in W$ l'elem. più lungo $P_\delta = [1, \delta]$, $A = S$ riflessioni semplici, allora P_δ è è un reticolo, e quindi $M(P_\delta)$ = monoide di Artin del gruppo sopra è monoide è di Garside.

X CW-complesso

- X_0 discreto.
- X_n è ottenuto da X_{n-1} attaccando simultaneamente le n-celle
- X topologia debole: $A \subset X$ è aperto $\Leftrightarrow$ $A \cap X_n$ è

aperto $\forall n$

($\forall \alpha$, $f_\alpha : D^n \to X$ funzione caratt. della cella di indice α, $f_\alpha^{-1}(A)$ è aperto)

X Hausdorff, $X = \coprod e_\alpha^m$ e_α^m celle aperte

$\forall \alpha$ $\exists f_\alpha : D^m \to X$ t.c.

- $f_\alpha|_{\mathring{D}^m} : \mathring{D}^m \to \mathring{e}_\alpha$ è omeo.
- $f_\alpha(\partial D^m) \subset$ unione finita di celle di dim $< m$.

Omologia cellulare:

complesso algebrico $C_* = \to C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \cdots$

$$C_K = \bigoplus_{\alpha \in I_K} \mathbb{Z}\, e_\alpha^K$$

$\partial_n(e_\alpha^K)$ si calcola : $\varphi_\alpha : \partial D^n = S^{n-1} \to X_{n-1}$

$$c_{\alpha\beta} : S^{n-1} \longrightarrow X_{K-1} \longrightarrow \frac{X_{n-1}}{X_{K-2}} \cong \bigvee_{\beta'} S^{n-1}_{\beta'} \longrightarrow S^{n-1}_\beta$$

$$\partial_n(e_\alpha^n) = \sum_{\beta \in I_{n-1}} \underbrace{[\partial e_\alpha^n : e_\beta^{n-1}]}_{\in \mathbb{Z}}\, e_\beta^{n-1}$$

$[\partial e_\alpha^n : e_\beta^{n-1}] =$ grado di $c_{\alpha\beta}$

$f : S^n \to S^n$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$

$gr(f) = \gamma$ $f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$

$x \to \gamma \cdot x$

$gr(f)$ si può calcolare prendendo un "valore regolare" $y \in S^n$,
$S^n \supset f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_h\}$, $f|_{U_i(x_i)} : U_i(x_i) \xrightarrow{\cong} U_i(y)$

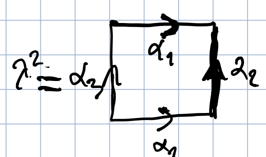
ogni $f|_{U_i}$ preserva o meno l'orientazione, e si fa la somma ± 1
$i = 1, \dots, h$.

K CW-complesso. ($\sigma < \tau$ se σ è faccia di τ, $\sigma \subset \bar{\tau}$)

__def.__ Sia σ^p faccia di τ^{p+1}. $\varphi : D^{p+1} \to K$ funzione caratteristica di τ^{p+1}.
σ è detta __faccia regolare__ di τ se

i) $\varphi : \varphi^{-1}(\sigma) \to \sigma$ è omeomorfismo
ii) $\overline{\varphi^{-1}(\sigma)}$ è una p-palla chiusa.

__esempio.__ K CW-complesso $K_0 = 1$ punto, $K_1 = \bigvee_{i=1}^{3} S^1_i$,
K_2 un'unica 2-cella con bordo



σ_1 non è regolare ($\varphi^{-1}(\sigma_1)$ ha 2 componenti)
σ_2 è regolare ($\varphi^{-1}(\sigma_2)$ è un lato aperto)
σ_3 è regolare

__Def.__ Una funzione di Morse discreta su K è una funzione
$$f : \mathcal{F}(K) \to \mathbb{R}$$
$\mathcal{F}(K)$ = insieme delle celle di K. t.c. $\forall \sigma^p$:

(i) se $\sigma^p < \tau^{p+1}$ è faccia irregolare $\Rightarrow f(\tau) > f(\sigma)$.
Inoltre: $\#\{\tau^{p+1} > \sigma \mid f(\tau) \le f(\sigma)\} \le 1$

(ii) se $\lambda^{p-1} < \sigma^p$ è faccia irregolare $\Rightarrow f(\lambda) < f(\sigma)$

e $\#\{\lambda^{p-1} < \sigma \mid f(\lambda) \geq f(\sigma)\} \leq 1$

oss una f di M. esiste ~~sempre~~ es: $f(\sigma^p) = p$ (in questo caso $\#\{\cdots\} = 0$)

Def. Sia f di Morse discreta, diciamo che σ^p è <u>critica</u> di indice p, se

i) $\#\{\tau > \sigma \mid f(\tau) \leq f(\sigma)\} = 0$

ii) $\#\{\lambda < \sigma \mid f(\lambda) \geq f(\sigma)\} = 0$

oss. K CW-complesso regolare (tutte le funzioni di attaccamento sono iniettive) $\Rightarrow$ min f è preso in una 0-cella.
(infatti, ogni n-cella, n > 0, ha almeno 2 celle nel bordo)

Per il max f: se ogni n-cella, n < dim K, è faccia di almeno due (n+1)-celle, allora max(f) è preso su una cella di dim = dim K (questo accade per es. per una varietà triangolata).

Affinché σ^p non sia critica, deve esistere o

$\tau^{p+1} > \sigma^p$ t.c. $f(\tau) \leq f(\sigma)$ (A)

o $\lambda^{p-1} < \sigma^p$ t.c. $f(\lambda) \geq f(\sigma)$ (B)

Prop (A) e (B) non possono verificarsi contemporaneamente.

Lemma. $\tau^{p+1} > \sigma^p > \lambda^{p-1}$ Allora vale (almeno) una tra:

i) σ è irregolare in τ

ii) λ è irregolare in σ

iii) $\exists\ \mu^p \neq \sigma^p$ t.c. $\tau > \mu > \lambda$

__dim__ Se i) e ii) non valgono, mostriamo che vale iii).

$$\partial\tau = \pm\sigma + \sum_{\substack{\mu^p\neq\sigma \\ \mu^p<\tau}} c_\mu \cdot \mu \qquad \text{per certi } c_\mu \in \mathbb{Z}$$

poiché σ è regolare di τ

$$\partial\sigma = \pm\lambda + \sum_{\substack{\nu^{p-1}\neq\lambda \\ \nu^{p-1}<\sigma}} d_\nu \cdot \nu \qquad d_\nu \in \mathbb{Z}.$$

(poiché λ è regolare di σ)

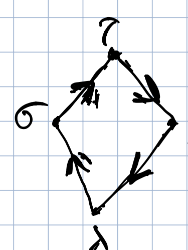
$\partial^2 = 0$, quindi

$$0 = \partial^2\tau = \partial\Big(\pm\sigma + \sum_{\mu\neq\sigma} c_\mu \mu\Big) = \pm\partial\sigma + \sum_{\mu\neq\sigma} c_\mu \partial\mu =$$

$$= \pm\lambda + \sum_{\nu\neq\lambda} d_\nu \cdot \nu + \sum_{\mu\neq\sigma} c_\mu \partial\mu$$

quindi $\exists\ \mu^p \neq \sigma^p$ t.c. $(\partial\mu : \lambda) \neq 0 \Rightarrow \tau > \mu > \lambda$. ∎

Se vale (A) per un certo τ^{p+1}, $\forall$ altro $\mu^p < \tau^{p+1}$, $\mu^p \neq \sigma^p$, si deve avere $f(\tau) > f(\mu)$. Quindi $f(\mu) < f(\sigma)$.



Similmente per $\lambda^{p-1} < \sigma^p$ c'è solo più una eccezione e quindi $f(\mu) > f(\lambda)$. Questo dà una contraddizione.