Lemma (Matsumoto) Siano $w = s_1 \cdots s_n = s'_1 \cdots s'_k$ decomposizioni ridotte di $w \in W$. Allora si può passare da una all'altra usando solo le relazioni di treccia

---

$$W = \langle s \in S \mid s^2 = 1, \quad \underbrace{ss' \cdots = s's \cdots}_{\text{relazioni di treccia}} \quad (m(s,s') \text{ fattori}) \rangle$$

$$G_W = \langle g_s,\ s \in S \mid g_s g_{s'} \cdots = g_{s'} g_s \cdots \quad (m(s,s') \text{ fattori}) \rangle$$

$$G_W^+ = \langle \cdot \ - \ - \ - \ - \rangle$$

come monoide

---

dim Per induzione su k. Poiché $\ell(s_1 \cdots s_n s'_k) = n-1 \Rightarrow$ per la condizione di scambio $\exists\, i \leq k$ t.c. $s_1 \cdots s_n s'_k = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_k \Rightarrow$

$$s_i \cdots s_n s'_k = s_{i+1} \cdots s_k \Rightarrow s_i \cdots s_n = s_{i+1} \cdots s_n s'_k \qquad \text{(ridotta)}$$

Se $i > 1$, allora per induzione posso passare da $s_i \cdots s_n$ a $s_{i+1} \cdots s_n s'_k$ con relaz. di treccia e poi da $s_1 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_n (s'_k)$ a $s'_1 \cdots s'_{k-1} (s'_k)$ con relaz. di treccia.

Altrimenti, sarà $i = 1$: $\quad s_1 \cdots s_n = s_2 \cdots s_n s'_k$.

Ripetiamo questo fatto moltiplicando per s_n: o uso la condiz. di scambio con $i > 1$, e quindi per induz. concludo, oppure $i = 1$, cioè:

$$w = s_3 \cdots s_n s'_k s_k$$

Andando avanti così, o si conclude per induzione, oppure

$$w = \cdots\ s'_n s_n s'_n s_k \qquad (n \text{ fattori})$$

Moltiplicando per s'_n $\quad \ell(ws'_n) = n-1 \Rightarrow (\cdots s'_n s_n s'_n s_n)\, s'_n = \cdots s'_k s_n s_n$

$$\Rightarrow w = \underbrace{\cdots s'_n s_n s'_n s_n = \cdots s_n s'_n s_n s'_k}_{\text{è relaz. di treccia}} \qquad \text{(ridotte di lunghezza } m(s,s')\text{)}$$

Per induzione, posso passare da $s_1 \cdots s_n$ a $(\cdots s_n s'_k s_k)$ con relaz. di treccia e da $s'_1 \cdots s'_n$ a $(\cdots s'_k s_n s'_k)$ con relaz. di treccia. ▬

$\sigma: W \to G_W^+ \;:\; w = s_1 \cdots s_n \longrightarrow g_{s_1} \cdots g_{s_n}$

ha senso per il lemma. (non è omomorfismo)

è sezione di $G_W \xrightarrow{\pi} W$ e di $G_W^+ \xrightarrow{\pi} W$, $g_s \longrightarrow s$

W finito $\exists!$ elem. di lunghezza massima $\delta \in W$. δ è divisibile da tutti i $w \in W$.

$\Delta = \sigma(\delta) \in G_W^+$

Teorema (W, S) finito, allora (G_W^+, Δ) è un monoide di Garside, e G_W è un gruppo di Garside. Anche: Δ è mcm dei generatori g_s.

Lemma. (W, S) come sopra, allora $\mathrm{Im}(\sigma): W \to G_W^+$ è chiuso per divisori sinistri e destri in G_W^+.

dim. $g \in \mathrm{Im}(\sigma)$, $g = \sigma(\pi(g))$, sia f un divisore a sinistra di g in G_W^+, $g = fg'$. Allora $\exists$ $f = g_{s_1} \cdots g_{s_k}$,

$g' = g_{s'_1} \cdots g_{s'_h}$, $g = g_{s_1} \cdots g_{s_k} g_{s'_1} \cdots g_{s'_h}$. Ma:

$g = g_{s''_1} \cdots g_{s''_t}$ dove $s''_1 \cdots s''_t$ è ridotta. $k+h = t$. Quindi

$s_1 \cdots s_k s'_1 \cdots s'_h$ è ridotta $\Rightarrow$ $s_1 \cdots s_k$ è ridotta, cioè $f \in \mathrm{Im}(\sigma)$ ▬

Lemma $\forall g \in G_W^+$ sono equivalenti:

i) $g \in \mathrm{Im}(\sigma)$

ii) $g \in \mathrm{Div}_s(\Delta)$ (divisore sinistro)

iii) $g \in Div_d(\Delta)$ (c. dato)

Assumiamo i) $g = g_{s_1} \cdots g_{s_k}$ $s_1 \cdots s_k$ ridotta. Ma $s_1 \cdots s_k$ divide δ in W, $\delta = s_1 \cdots s_k s_1' \cdots s_h'$ espr. ridotta.
$\Delta = \sigma(\delta) = g\,\sigma(s_1' \cdots s_h') \Rightarrow$ che è ii). i) $\Rightarrow$ iii) analogo.

$\Delta \in \mathrm{Im}(\sigma) \Rightarrow$ ogni divisore di $\Delta \in \mathrm{Im}(\sigma)$ per il lemma precedente. ∎

"dim teo". Δ è un el. di Garside di G_W^+. Infatti, ogni generatore $g_s = \sigma(s) \in \mathrm{Im}(\sigma)$, quindi g_s divide Δ e quindi $Div_s(\Delta)$ genera G_W^+. Lo stesso per $Div_d(\Delta)$. Per il lemma $Div_s(\Delta) = Div_d(\Delta)$. $Div(\Delta) \longleftrightarrow W$ bigezione, cioè $Div(\Delta)$ finito.

Più complicato: G_W^+ è cancellativo (ce anche ca detto) e ha mcm e gcd, $G_W^+ \hookrightarrow G_W$ è iniettiva. ∎

Teorema Y_W è un $K(\pi,1)$. [Deligne, Inv. Math '72]

(si dimostra che $\mathcal{A}$ arrang. in $\mathbb{R}^n$ che sia simpliciale, cioè ogni camera è un cono simpliciale [cono generato da una base di $\mathbb{R}^n$], allora il complementare di $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ è un $K(\pi,1)$)

Lemma. K un CW-complesso, $\pi_1(K,*) = G$. Allora il riv. universale $\hat{K}$ di K è un CW-complesso; se $K = \bigcup_{j \in S_k} e_j^k$, $\hat{K} = \bigcup_{\substack{j \in S_k \\ \alpha \in G}} \hat{e}_{j,\alpha}^k$ se $p: \hat{K} \to K$ proiezione $p(\hat{e}_{j,\alpha}^k) = e_j^k$.

$p: U' \to Y_W$ riv. universale. $G_W = \pi_1(Y_W)$ è di Garside

$g \in G_W$, $(g = \Delta^{-n} g')$, $n \geq 0$, $g' \in G_W^+$

$Y_W \simeq X_W$ con celle $e(T)$, $T \subset S$ $\dim e(T) = |T|$

$\bigcup_{T \subset S}'' e(T)$

$$p : \mathcal{U} \longrightarrow X_W$$

$$\mathcal{U} = \bigcup_{g \in G_W} e(T)_g = \bigcup_{\substack{n \geq 0 \\ g = \Delta^{-n} g' \\ g' \in G_W^+}} e(T)_g$$

Sia $\mathcal{U}^+ = \bigcup_{g' \in G_W^+} e(T)_{g'}$.

per n fissato:

per traslazione in $\mathcal{U}$ tramite Δ^{-n}

$$\bigcup_{g' \in G_W^+} e(T)_{\Delta^{-n} g'} = (\mathcal{U}^+)_{(\Delta^{-n})} \cong \mathcal{U}^+$$

$(\mathcal{U}^+)_{(\Delta^{-n})} \supset (\mathcal{U}^+)_{\Delta^{-(n-1)}}$

$$\Delta^{-n} g' = \Delta^{-(n-1)} \Delta^{-1} g'$$
$$g' = \Delta g''$$
$$= \Delta^{-(n-1)} g''$$
$$g'' \in G_W^+$$

e $\mathcal{U} = \bigcup_n (\mathcal{U}^+)_{(\Delta^{-n})}$

Quindi "basta" dimostrare che $\mathcal{U}^+$ è contrattile.

NOTA: $\mathcal{U}' \longrightarrow \tilde{Y}_W \xrightarrow{|W|:1} Y_W = \tilde{Y}_W / W$

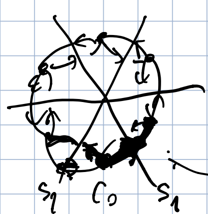
$$1 \to \pi_1(\tilde{Y}_W) = \tilde{G}_W \longrightarrow G_W \underset{\sigma}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} W \longrightarrow 1$$

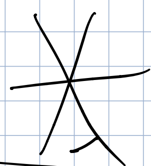
$g \in G_W$: $\pi(\sigma\pi(g)\, g^{-1}) = 1 \Rightarrow \sigma(\pi(g))\, g^{-1} = \tilde{g} \in \tilde{G}_W$

$\forall g \in G_W \qquad g = \sigma(w)\cdot \tilde{g} \qquad$ per qualche $w \in W$, $\tilde g \in \hat{G}_W$.

$$\hat{Y}_W \simeq \bigcup_{\substack{w\in W\\ T\subseteq S}} e(w,T) \xrightarrow{\;q\;} \bigcup e(T) = X_W \qquad (= \hat{X}_W)$$

NOTA: $e(w,T) = e(T)_{\sigma(w)}$ (si può vedere)





$W = \langle s_1, s_2 \mid s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2 \rangle$

$\sigma(s_1) = g_{s_1}$

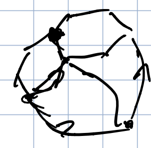
$$\mathcal{U}^+ = \bigcup_{g\in G_W^+} e(T)_g = \bigcup_{g\in \hat{G}_W(1,w)} e(w,T)_g$$

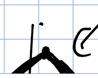
si sollevo $\sigma(w)$ a $\hat{X}_W$ mi viene un cammino che congiunge il punto base con il punto w (vertice di $\hat{X}_W$)

sollevo $g \in G_W^+$ trovo dei cammini (questi) di $\hat X_W$ che percorrono i lati in senso positivo (1-scheletro è orientato)

<u>Idea</u> $\quad \mathcal{U}^+ = \bigcup_n \mathcal{U}^+_n \quad$ dove

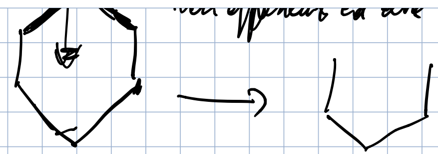
$$\mathcal{U}^+_n = \bigcup_{\substack{g\in G_W^+\\ l(g)\le n}} e(T)_g$$ dimostro che $\mathcal{U}^+_n$ si retrae su $\mathcal{U}^+_{n-1}$

uno vede che le celle parametrizzate da elementi di lunghezza $= n$ arrivano in $\mathcal{U}^+$ nella forma in  così posso contare una "faccia libera" di queste celle



faccia libera

non incidente ad altre celle posso "cancellarla"



appianando le celle lungo le facce libere.