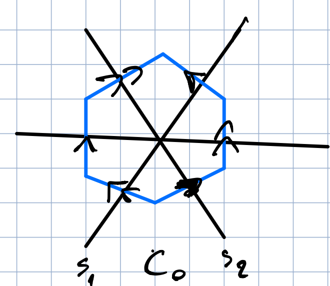
$\tilde{Y}_W = M(Q)$ con azione di W su $\mathbb{C}^n$ $\quad w(x+iy) = wx + iwy$
è libera su $\tilde{Y}_W$. $\quad \tilde{Y}_W / W = Y_W$.

<u>Teorema</u>. Y_W è omotopicamente equivalente al complesso X_W: si prende CW-complesso $Q = \bigcup e(\gamma C_T)$ e si identificano le celle $e(\gamma C_T)$, $e(\gamma' C_{T'})$ $\iff T = T'$ (con nelle altre celle) usando l'omeomorfismo $\gamma'\gamma^{-1} : e(\gamma C_T) \to e(\gamma' C_{T'})$

<u>esempio</u> A_2 •—• s_1 s_2



$X \subset \tilde{Y}_W \qquad X = \bigcup_{C \prec F} e(C \prec F)$.

Ogni camera $C = w C_0$, $w \in W$ unico, $F = \gamma . C_T$, $\gamma \in W^T$

$C \prec F \iff w = \gamma\gamma'$, $\gamma' \in W_T$. Possiamo identificare le celle $e(C \prec F)$ con $e(w, T)$: infatti w e T determinano $\gamma \in W^T$
$w = \gamma\gamma' \qquad W = W^T W_T$.

X invariante per l'azione di W su $\tilde{Y}_W$: scelgo i punti in C_T e poi li traslo nelle varie faccette.
$\hat{w} \in W$ manda le celle $\quad e(C \prec F) \to e(\hat{w} C \prec \hat{w} . F)$
$(e(w,T) \to e(w\hat{w}, T))$.
<u>Osservazione</u> L'omotopia che manda $\tilde{Y}_W \xrightarrow{\Phi_t} \tilde{Y}_W$, $\Phi_0 = id$,

$\Phi_1(\tilde{Y}_W) = X$, è W-equivariante: se $z \equiv_W z'$ in $\tilde{Y}$

$\Rightarrow \Phi_t(z) \equiv_W \Phi_t(z')$. (deriva dalla costruzione esplicita).

Segue che $Y_W = \tilde{Y}_W / W \cong X/W$

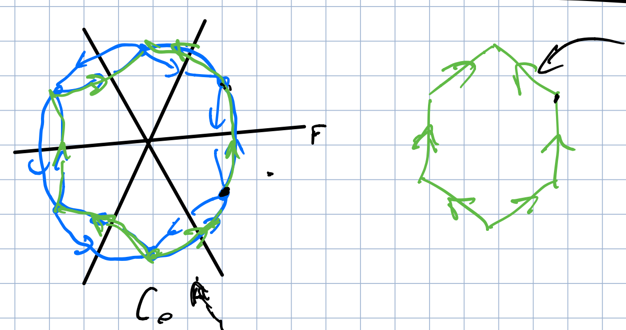
Come segue, $e(w,T)$, $e(w',T)$ si identificano, in particolare si identificano alle celle del tipo $e(1,T)$ (duale di $\mathcal{S}(C_0 \prec C_T)$).

Consideriamo

$$\varphi_{C_0}(Q) = \bigcup_{F \in S} e(C_0.F \prec F) = \bigcup_{\substack{T \subset S \\ \gamma \in W^T}} e(\gamma, T)$$

$(\gamma' = 1)$

es: A_2



$\mu_Q(\varphi_{C_0} Q) = Q$. φ_{C_0} è omeomorfismo tra Q e $\varphi_{C_0} Q \subset X$.

Chiaramente $\varphi_{C_0} Q$ contiene almeno una cella $\forall$ orbita.

$e(\gamma, T) = \varphi_{C_0}(e(\gamma C_T))$ si identifica a $e(1,T) = \varphi_{C_0}(e(C_T))$ usando γ (che dà un omeomorfismo sulle parti reale)

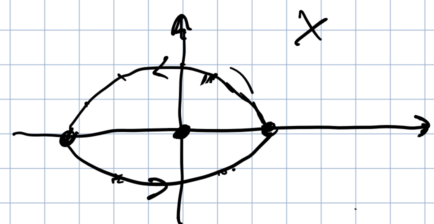
$$\begin{array}{ccc} e(1,T) & \xrightarrow{\gamma} & e(\gamma,T) \\ \downarrow \mu_0 & & \downarrow \mu_\gamma \\ e(C_T) & \longrightarrow & e(\gamma C_T) \end{array}$$

$e(C_T) \xrightarrow{\gamma} \ldots$

[S. Mathemat. Res. Letters, '94]

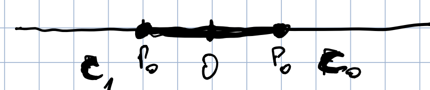
<u>Corollario</u>. X_W è un CW-complesso che ha $\binom{n}{k}$ k-celle $k=0,\dots,n$, $n=\# S$.

<u>es</u>. A_1



$\{0\} \subset \mathbb{R}$

$W=\mathbb{Z}_2$ $\quad x \mapsto -x$ in $\mathbb{R}$ $\quad z \mapsto -z$ in $\mathbb{C}$ $\quad Y_W = \mathbb{C}^*/_{z\sim -z}$



X_W

$Q = [P_0 P_1]$

0-celle $\{P_0, P_1\}$

1-celle $[P_0 P_1]$

$|\!-\!-\!|/_{P_0\sim P_1} \cong S^1$

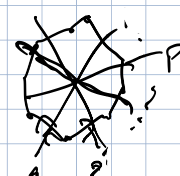
<u>Teorema</u> $\pi_1(Y_W) = \langle g_s,\ s\in S \mid \underbrace{g_s g_{s'} g_s g_{s'} \cdots}_{m(s,s') \text{ fattori}} = g_{s'} g_s g_{s'} g_s \cdots \rangle$

[$W = \langle s\in S \mid s^2=1,\ ss'ss'\cdots = s's s' s \cdots$ $m(s,s')$ fattori $\rangle$]

esempio A_n $\quad G_W = \pi_1(Y_W)$ = gruppo di trecce Br_{n+1}.

<u>dim</u>: si guardi $(X_W)_2$ il 2-scheletro di X_W, considerando

che nel caso $I_2(p)$ X_W si ottiene dal suo 2p-gono (regolare)



identificando le 1-celle

Come nel caso A_2: viene un rebbiamento del 1/p cerchio nel bordo.

In X_W: ha 1 sola 0-cella

ha n 1-celle ~~n~~ $\# S$ corrispondenti ai sottoinsiemi con 1 elemento in S, cioè corrispondono agli ~~s~~ $\in S$

ha $\binom{n}{2}$ 2-celle: $\forall\ T = \{s_i, s_j\} \subset S$

il cui bordo è esattamente il caso $I_2(p)$ con $p = m(s_i, s_j)$.

<u>Def.</u> GRUPPO DI ARTIN (DI TIPO W).

$$G_W = \langle g_s \in S \mid g_s g_{s'} \cdots = g_{s'} g_s \cdots \quad (m(s,s') \text{ fattori}) \rangle$$

Può essere definito $\forall\ (W, S)$ (non necessariamente finito).

Per A_n si è visto Y_W è un $K(\pi, 1)$. La dimostrazione vista ($\tilde{Y}_W$ è un fibrato, ecc.) non funziona in generale.

---

1) MONOIDE: $M, \cdot$ un'operazione associativa, con $1 \in M$.

2) un elemento $a \in M$ si dice divisore-sinistro (divisore-destro) di $b \in M$ se $\exists\ b' \in M$ t.c. $b = ab'$ ($b = b'a$).

Quando esiste, si definisce mcm (destro) di certi elementi come un multiplo comune (per la divisibilità a sinistra) che divide qualunque multiplo. [lo stesso per mcm (sinistro)].

Si definisce similmente gcd (sinistro) divisore comune che è divisibile da ogni divisore comune. [a destra].

3) Una **funzione peso** su M è $\lambda: M \to \mathbb{N}$ che soddisfa $\lambda(ab) \geq \lambda(a) + \lambda(b)$ e $a \neq 1 \Rightarrow \lambda(a) > 0$.

Lemma. Se M è un monoide con una funzione peso allora la relazione $a \leq b \Leftrightarrow \exists b': ab' = b$ è relazione d'ordine parziale.

dim $a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b$

$ab' = b,\ ba' = a \Rightarrow ab'a' = a$ quindi

$\lambda(a) = \lambda(ab'a') \geq \lambda(a) + \lambda(b'a')$

$\lambda(b'a') = 0 \Rightarrow b'a' = 1$ ma $\lambda(b'a') \geq \lambda(b') + \lambda(a')$ > 0 se uno tra $b', a' \neq 1$.

4) Un monoide M si dice **cancellativo a sinistra** (a destra) se $ab = ac \Rightarrow b = c$ ($ba = ca \Rightarrow b = c$)

5) Un MONOIDE QUASI-GARSIDE è una coppia (M, Δ), con M monoide f. c.

(i) M è cancellativo a sinistra e a destra

(ii) $\exists$ funzione peso $\lambda: M \to \mathbb{N}$

iii) due elem. qualunque hanno mcm e gcd destri e sinistri.

iv) Δ è un elemento di Garside di M, cioè l'insieme $Div_s(\Delta)$ dei divisori sinistri di Δ coincide con $Div_d(\Delta)$ l'insieme dei divisori destri di Δ e tale insieme $Div(\Delta)$ genera M.

v) se l'insieme $Div(\Delta)$ è finito $\Rightarrow$ (M, Δ) monoide di Garside.

6) Un gruppo G si dice gruppo delle frazioni sinistre di un monoide M se $M \hookrightarrow G$ (inclusione) e ogni $g \in G$ si scrive come $g = f_1^{-1} f_2$, $f_1, f_2 \in M$. (lo stesso a destra).

7) Un gruppo G si dice gruppo di Garside (quasi-Garside) se $\exists$ monoide di Garside (q. G.) (M, Δ) t.c. G è il gruppo di frazioni sinistre di M.

Proposizione (forma normale). Sia G gruppo di Garside per un certo monoide (M, Δ). Allora ogni $g \in G$ si esprime univocamente come

$$g = \Delta^n s_1 \cdots s_k \quad , n \in \mathbb{Z} \quad , s_i \in Div(\Delta)$$

$s_1 \neq \Delta$, $s_k \neq 1$, e $\forall i = 1, \dots, k$:

$$\forall h \in M \setminus \{1\} \Rightarrow \quad h \leq s_{i+1} \Rightarrow s_i h \not\leq \Delta \qquad (*)$$

---

dim $s \in Div(\Delta)$, $\exists s'$ $ss' = \Delta$. $\Rightarrow \exists s''$: $s's'' = \Delta$ quindi $s(s's'') = s\Delta = \Delta s''$. Quindi M è invariante per coniugio

Inoltre Δ: $\forall g \in M\ \exists g' \in M$ t.c. $g\Delta = \Delta g'$.

$g = s_1 \cdots s_k$, $s_i \in \mathrm{Div}(\Delta)$ $\qquad g\Delta = s_1 \cdots s_k \Delta = s_1 \cdots s_{k-1} \Delta \cdot s_k'$

Segue che $\forall g \in M$ è un divisore di Δ^n per n abbastanza grande

$g = s_1 \cdots s_k$; $s_k s_k' = \Delta$ $\qquad g s_k' = s_1 \cdots s_{k-1} \Delta = \Delta s_1' \cdots s_{k-1}'$

$s_{k-1}' s_{k-1}'' = \Delta$; $g s_k' s_{k-1}'' = \Delta s_1' \cdots s_{k-2}' \Delta = \Delta^2 s_1'' \cdots s_{k-2}'' = \cdots$

$g g'' = \Delta^k$. Allora posso scrivere $g = \Delta^n g'$, $n \in \mathbb{Z}$, $g' \in M$.

$g'' g''' = \Delta^h \Rightarrow g \Delta^h = \Delta^h g''' \Rightarrow \Delta^{k+h} g'''$.

Prendo n massimo possibile, $g = \Delta^n g'$ è unica

Se $g' = 1 \Rightarrow$ decomposizione vuota.

Altrimenti $s_1 = \gcd(g', \Delta)$ (a sinistra).

Si ha $g' = s_1 g''$. Se $g'' \neq 1$, $g'' = s_2 g'''$, $\cdots$

Se $g' \neq 1 \Rightarrow s_1 \neq 1$ (Div Δ genera) $\Rightarrow \lambda(g') > \lambda(g'') > \cdots$

quindi il processo termina in un n° finito di passi.

$1 \neq h \preceq s_{i+1}$, se $s_i h \preceq \Delta$ avrei $(s_{i+1} = h s_{i+1}')$

$g' = s_1 \cdots s_{i-1} \hat{g} = s_1 \cdots s_{i-1} s_i h s_{i+1}' \tilde{g} \Rightarrow s_i h \preceq \gcd(\hat{g}, \Delta)$

contro la massimalità di s_i.

Quindi la decomposizione esiste.

unicità (non la facciamo)

Def. Monoide di Artin

$G_W^+ = \langle g_s, s \in S \mid g_s g_{s'} \cdots = g_{s'} g_s \cdots \rangle$ come monoide.

ora le relazioni hanno lunghezza uguale a sinistra e a destra, quindi $\forall$ ogni elemento $g \in G_W^+$ è ben definita la lunghezza (n° di generatori $g = g_{s_1} \cdots g_{s_k}$).

<u>Lemma</u> (Matsumoto). (W, S). $w = s_1 \cdots s_k = s_1' \cdots s_k'$ decomp. ridotte di $w \in W$. Allora si può passare da una decomposizione all'altra usando solo le relazioni $(ss' \cdots = s's \cdots)$ (cioè senza mai usare $s^2 = 1$)

<u>dim</u> si fa per induzione su k.

Ci permette di trovare una <u>sezione</u> $\sigma : W \to G_W^+$

della mappa

$$\begin{tikzcd} G_W \arrow[r, "\pi"'] & W \arrow[l, bend right, "\sigma"'] \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

$$g_s \longrightarrow s \qquad \text{surgettivo}$$

$$G_W^+ \xrightarrow[\substack{\uparrow \\ \text{di monoidi}}]{} W$$

(σ non è omomorfismo $\pi\sigma = id_W$)

$$w = s_1 \cdots s_k \qquad \text{decomp. ridotta}$$

$$\sigma(w) = g_{s_1} \cdots g_{s_k} \qquad \text{è ben definita per Matsumoto}$$

<u>Teorema</u> (W, S) finito. G_W, G_W^+ come sopra.

Sia $\Delta = \sigma(\delta)$ (δ è l'elemento più lungo di W)

Allora (G_W^+, Δ) è un monoide di Garside, G_W è di Garside.
