$Q = \bigcup_{F \in \mathcal{S}} e(F)$ $\qquad$ $e(F) = \bigcup_{F^{j_0} < \dots < F^{j_n} \preceq F} [x(F^{j_0}), \dots, x(F^{j_n})]$

$C < F$ $\qquad$ $\varphi_{C<F} : e(F) \to \mathcal{M}(Q)$

$$\sum_\ell \lambda_\ell x(F^{j_\ell}) \longrightarrow \sum_\ell \lambda_\ell x(F^{j_\ell}) + i \sum_\ell \lambda_\ell x(C.F^{j_\ell})$$

$\mu_Q \circ \varphi_{C<F} = id \Rightarrow \varphi_{C<F}$ è omeomorfismo su una cella $e(C<F)$

$\hat{\mathcal{M}}(Q)$

$$\partial e(C<F) = \varphi_{C<F} \Big| \bigcup_{F^{j_0} < \dots < F^{j_n} \precneqq F} [x(F^{j_0}), \dots, x(F^{j_n})] =$$

$$= \bigcup_{G \precneqq F} e(C.G < G)$$

$X = \bigcup e(C<F) \subset \mathcal{M}(Q)$

$\hat{Q} = \mu_Q^{-1}(Q) \cap \mathcal{M}(Q)$ $\qquad$ $\mathcal{M}(Q)$ si deforma su $\hat{Q}$

$c = (F^0 < \dots < F^n)$ catena massimale $\qquad$ F^0 camera, $F^n = \{0\}$

C camera.

$$Y(c, C) = \{x + iy \in \mathcal{M}(Q) \mid x \in [x(F^0), \dots, x(F^n)],\ y \in \bar{C}\}$$

$z = x + iy = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j x(F^j) + iy$ $\qquad$ $y \in \overline{\mu_{F^j}(C)} \supset \bar{C}$

$y = \mu_j x(C.F^j) + \alpha$

$\mu_j \geq 0$, $\alpha \in \partial \overline{\mu_{F^j}(C)}$

$\lambda_0 = \dots = \lambda_{j-1} = 0,\ \lambda_j \neq 0 \Rightarrow \mu_j \neq 0$ $\qquad$ $S(\lambda, \mu) = \sum \min\{\lambda_i, \mu_i\} \neq 0$

$$\hat{z}(\lambda,\mu) = \frac{1}{S(\lambda,\mu)}\left\{\sum_{j=0}^{n} \min\{\lambda_j,\mu_j\}\, x(F^j) + i \sum_{j=0}^{n} \min\{\lambda_j,\mu_j\}\, x(C.F^j)\right\}$$

$\in \varrho(C,F) \in X$

dobbiamo dimostrare che

$$\bigcup_{c,C} Y(c,C) = \hat{Q} \longrightarrow X \quad : z \longrightarrow \hat{z}(\lambda,\mu)$$

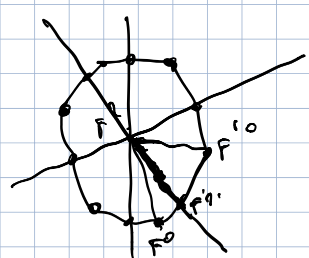
Se $z = x+iy \in Y(c,C) \cap Y(c',C')$ e siano

$\lambda,\mu,\ \lambda',\mu'$ i corrispondenti parametri.

Intanto è evidente che $\lambda = \lambda'$: ogni punto $x \in Q$ appartiene all'interno di un unico simplesso

$$x = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\, x(F^j) = \sum_{j=0}^{n} \lambda'_j\, x(F'^j)$$

se $F^j \neq F'^j \Rightarrow \lambda_j = \lambda'_j = 0$, se $F^j = F'^j \Rightarrow \lambda_j = \lambda'_j$.



$y \in \overline{C} \cap \overline{C'}$.

Se $C = C'$, se $F^j \neq F'^j$ abbiamo detto

che $\lambda_j = \lambda'_j = 0 \Rightarrow \min\{\lambda_j,\mu_j\} = \min\{\lambda'_j,\mu'_j\} = 0$

Se $F^j = F'^j \Rightarrow \mu_{F^j}(C) = \mu_{F'^j}(C) \Rightarrow \mu_j = \mu'_j$

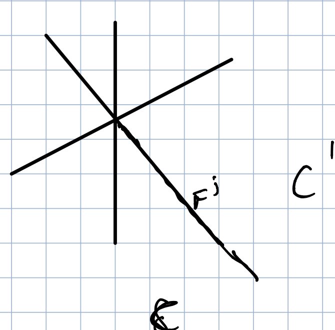
$\Rightarrow$ minimi sono uguali

Se $C \neq C'$. Se $F^j \neq F'^j$ i $\lambda = 0 \Rightarrow$ minimi sono $=$.

Se $F^j = F'^j$. $\quad C.F^j \neq C'.F'^j$

$y \in \overline{\mu_{F^j}(C)} \cap \overline{\mu_{F^j}(C')} \Rightarrow$

$\Rightarrow \partial\overline{\mu_{F^j}(C)} \cap \partial\overline{\mu_{F^j}(C')}$



$\Rightarrow \mu_j = \mu'_j = 0 \Rightarrow$ i minimi coincidono

Se $C.F^j = C'.F'^j \Rightarrow \overline{\mu_{F^j}(C)} = \overline{\mu_{F^j}(C')}$

$\Rightarrow \mu_j = \mu'_j$.

$\hat{Q} \longrightarrow X \quad : \quad z \to \hat{z}(\lambda, \mu)$

$\phi_t \; : \; z = x + iy \longrightarrow (1-t)\, z + t\, \hat{z}(\lambda, \mu) = x_t + i y_t$

$x_t \in Q$ per costruzione. Devo far vedere che $x_t + i y_t \in \mathcal{U}(Q)$

Se $\lambda_0 \neq 0 \Rightarrow \mu_0 = \lambda_0 \neq 0 \Rightarrow x_t = \lambda_0\, x(F^0) + \dots$

$\in$ cono $F^0 \Rightarrow z_t \in \mathcal{U}(Q)$

Se $\lambda_0 = \dots = \lambda_{j-1} = 0$, $\lambda_j \neq 0$, $\Rightarrow \mu_j \neq 0$.

$\Rightarrow x \in F^j$. Per costruzione di $\phi_t \Rightarrow x_t \in F^j$

$$x_t = \big[\underbrace{(1-t)\,\lambda_j + t \min(\lambda_j, \mu_j)}_{\neq 0}\big]\, x(F^j) + \dots \qquad \Rightarrow x_t \in F^j$$

Devo dim. che $y_t \notin Q_{|F^j|}$. $\quad \mu_j \neq 0$, $y \in \mu_{F^j}(C)$

$$y_t = (1-t)\, y + t \sum_{i=j}^{m} \frac{1}{s(\lambda, \mu)} \min(\lambda_i, \mu_i)\; x(C \cdot F^i)$$

$\overline{\mu_{F^i}(C)} \subset \overline{\mu_{F^j}(C)}$ per $i \geq j$ per cui tutti i

vettori $x(C \cdot F^i) \in \overline{\mu_{F^j}(C)}$, che è convesso

$\Rightarrow$ anche le combinazione sta in $\mu_{F^j}(C) \Rightarrow y_t$ sta dentro

cono di $Q_{|F^j|}$.

$\phi_t \; : \; \phi_0 = id, \quad \phi_1(\hat{Q}) = X$

$\phi_1|_X \sim id_X$.

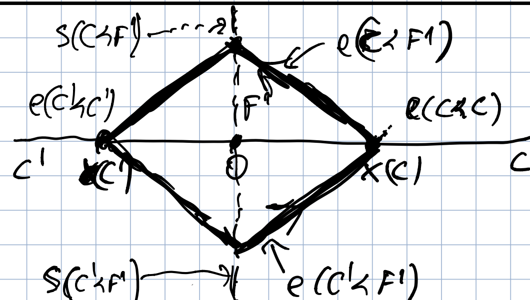
osserviamo che ϕ_1 manda j-scheletro di X in sé ($x \in X_j \Rightarrow$ $\lambda_i = 0$ per $i > j$). Basta far vedere che ϕ_1 manda ogni cella in sé.

[dedurre che è omotopa $\simeq id$. Lemma: $f: D^n \to D^n$: $f|_{\partial D^n} = id \Rightarrow f \underset{\text{rel } \partial}{\simeq} id$]

Vediamo che Φ_1 manda "il centro" di ogni cella in sé.

$e(C < F^j)$ "centro" $p = x(F^j) + i\, x(C.F^j)$. $\Phi_1(p) = p$

Es 1. $\{0\} \subset \mathbb{R}$



Posso modificare la costruzione scegliendo l'embedding

$\varphi_{C<F}: e(F) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$: $\sum_{j=0}^{m} \lambda_j\, x(F^j) \longmapsto \sum_{j=0}^{m} \lambda_j\, x(F^j) + i \sum_{j=0}^{m} \lambda_j\, x(C.F^j)$

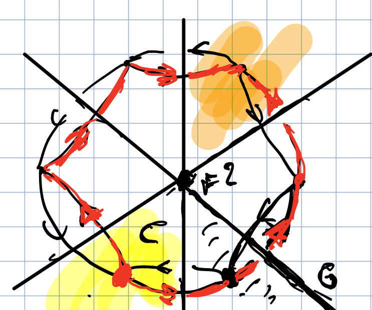
per $j=0$ F^0 è camera $C.F^0 = F^0$ $x(C.F^0) = x(F^0)$

posso scegliere il punto $x(C.F^0) = 0$ (non cambia nulla).

Con questa scelta le 0-celle di X sono $e(C<C) = x(C) + i \cdot 0 = x(C)$.

Posso orientare $e(C<F^1)$, che ha vertici $e(C<C)$, $e(C'<C')$, con $C' < F^1$ è l'altra camera adiacente a F^1; $e(C<C)$ è il 1° vertice

2)



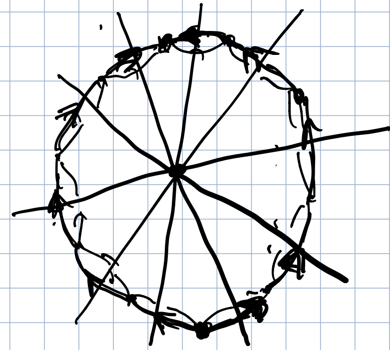
X ha dim 2

6 0-celle

12 1-celle

6 2-celle

$\partial\, e(C<F^2) = \bigcup_{G^1 < F^2} e(C.G^1 < G^1)$



C

2-celle $e(C<F^2)$

S. "Topology of the complement....", Inven. Math, 87.

Sia $\mathcal{A}$ l'arrangiamento associato a un gruppo di riflessioni W.

Fisso camera base $\mathbf{C}_0$. Allora la stratificazione reale $\mathcal{S}$:

$S=\{s_\alpha,\ \alpha\in\Delta\}$ $\quad\left(C_0=\{(\alpha,x)>0\ ,\ \alpha\in\Delta\}\right)$

$$\mathcal{S}=\{F=w.C_T \mid T\subset S\}$$

con

$C_T\subset\overline{C_0}$, $C_T=\{x\in\overline{C_0} \mid (\alpha,x)=0\ ,\ \alpha\in\Delta_T\ ;\ (\alpha,x)>0\ ,\ \alpha\in\Delta\setminus\Delta_T\}$

$(\Delta_T=\{\alpha\in\Delta \mid s_\alpha\in T\})$.

Ogni $F=w.C_T=\gamma\ C_T$ con $\gamma\in wW_T$ l'unico elemento di lunghezza minima $(\gamma\in W^T)$

$\{\ell(\gamma s)>\ell(\gamma),\ s\in T\}$

def. Se $T\subset T'$ poniamo $W^T_{T'}=\{w\in W_{T'} \mid \ell(ws)>\ell(w),\ s\in T\}$ $\quad$ (quindi $W^T=W^T_S$)

esercizio $\quad W^T=W^{T'}W^T_{T'}$ $\quad$ (come visto $W=W^TW_T$)

Proposizione. $F=\gamma C_T < F'=\gamma' C_{T'} \iff$

(i) $T \subset T'$

(ii) $\gamma = \gamma' \gamma''$, $\gamma'' \in W^T_{T'}$

dim. $F < F'$ $\quad \gamma C_T < \gamma' C_{T'} \Rightarrow \gamma^{-1}(F) = C_T <$ $\gamma^{-1}(F')$

$\Rightarrow \gamma^{-1} F' = C_{T'}$ poiché $\gamma^{-1}(F') \in \overline{C_T} \Rightarrow$ sta in $\overline{C_0}$ che è un dominio fondamentale. Essendo $C_T < C_{T'} \Rightarrow$ $T \subset T'$. Si ha anche

$(\gamma')^{-1} F' = C_{T'}$ e $W^T = W^{T'} W^T_{T'}$ segue (ii).

Viceversa, se $T \subset T' \Rightarrow C_T < C_{T'}$ e se $\gamma'' \in W^T_{T'}$, si ha $(\gamma')^{-1} F' = C_{T'} > \gamma'' C_T = (\gamma')^{-1} \gamma (C_T) = (\gamma')^{-1} F$ $\square$

Coroll. $F \in S$ è univocamente caratterizzato da (γ, T), $\gamma \in W^T$, $T \subset S$ con $<$ del lemma.

Q duale della cellulazione reale $e(F) = e(\gamma C_T)$.

Posso scegliere Q invariante per l'azione di W: prendo i punti $x(C_T)$ in $\overline{C_0}$ e poi in $F = \gamma C_T$ prendo $x(\gamma C_T) = \gamma x(C_T)$

Quindi W agisce sia su S che sul duale Q cellularmente

Prop. Due strati $F = \gamma C_T$, $F' = \gamma' C_{T'}$ appartengono alla stessa orbita $\Leftrightarrow T = T'$. Allo stesso modo, due celle $e(\gamma C_T)$ ed $e(\gamma' C_{T'})$ sono coniugate $\Leftrightarrow T = T'$.

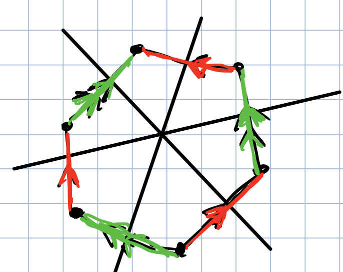
dim. $F = \gamma C_T$ è equivalente a C_T e siccome $\overline{C_0}$ è un dominio fondamentale $C_T \neq C_{T'}$ se $T \neq T'$. ∎

$\tilde{Y}_W = M(Q)$ con azione di W su $\mathbb{C}^n$ $w(x+iy) = w.x + iw.y$
ed è libera su $\tilde{Y}_W$. Si è dimostrato
$$Y_W = \tilde{Y}_W / W$$

<u>Teorema</u>. Y_W è omotopicamente equivalente al complesso X_W: si prende $Q = \bigcup e(\gamma C_T)$ e si identificano le celle
$$e(\gamma C_T),\ e(\gamma' C_{T'}) \iff T = T'$$
usando l'isomorfismo $\gamma'\gamma^{-1} : e(\gamma C_T) \cong e(\gamma' C_{T'})$

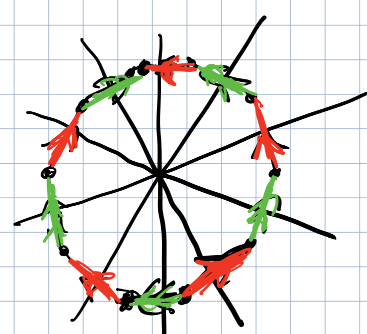
---

es. A_2

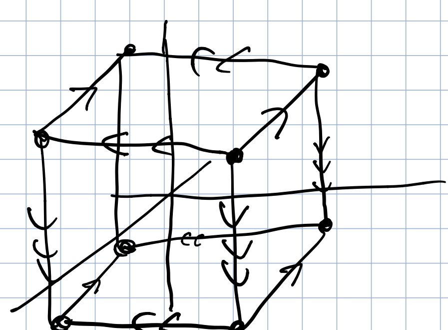


Y_W = esagono con lati identificati come indicato
1 vertice, 2 lati
1 2-celle

$I_2(p)$



$2p$-gono con identificazione dei lati.



$x=0,\ y=0,\ z=0$
vedo $(S^1)^3$
1 vertice $\quad$ 3 lati
3 2-celle
1 3-cella

$A_1 \times A_1 \times A_1$

Corollario X_α è un CW-complesso con $\binom{n}{k}$ k-celle $k=0,\dots,n$.

Dim. le k-celle corrispondono ai sottoinsiemi $T \subset S$ con $|T|=k$ $\left(\dim e(C_T) = \operatorname{codim} C_T = |T|\right)$ ∎