$Q \subset \mathbb{R}^n \qquad \mathcal{S} = \{F\}, \prec \qquad \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ in $\mathbb{C}^n$ con strati

$$s(G \prec F) = \{x + iy \in \mathbb{C}^n \mid x \in F,\ y \in pr_F(G)\}$$

con $s(G \prec F) \subset \mathcal{M}(Q) \iff G \in$ Camere.

$s(G \prec F) = \{x+iy \mid x \in H,\ H \in Q_{|F|},\ x \in H(F),\ H \in Q \setminus Q_{|F|},$
$y \in H,\ H \in Q_{|G|} (\subset Q_{|F|}),\ y \in H(G),\ H \in Q_{|F|} \setminus Q_{|G|}\}$

in particolare, se $G = C$ camera:

$s(C \prec F) = \{x \in H,\ H \in Q_{|F|},\ x \in H(F),\ H \in Q \setminus Q_{|F|},$
$y \in H(C),\ H \in Q_{|F|}\}$

convessi in $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$.

In $\mathcal{S}$ $\quad F \prec F' \iff \bar{F} \supset G \qquad \bar{F} =$ chiusura(F).

In $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ $\quad s(G \prec F) \prec s(G' \prec F') \iff \overline{s(G \prec F)} \supset s(G' \prec F') \iff$
$\iff F \prec F'$ e $pr_F(G) \prec pr_F(G')$

se $G' = C'$ camera allora anche G è camera e
$G = G' \cdot F$ (camera $\supset F$ nella chiusura $G \prec F$ ...)

segue che: $\quad \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{\preceq s(C \prec F)} = (\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{c})^{\preceq s(C \prec F)}$

note: $\quad \dim_{\mathbb{R}} s(G \prec F) = \dim F + \dim G$
$\quad \operatorname{codim}_{\mathbb{R}} s(G \prec F) = \operatorname{codim} F + \operatorname{codim} G$

$pr_Q : x + iy \to x \quad$ dà un isomorfismo di poset
$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{\preceq s(C \prec F)} \longrightarrow \mathcal{S}^{\prec F}$$

$$s(C.G < G) \longleftrightarrow G \qquad (G < F)$$

$F \in \mathcal{S}' = \mathcal{S} \setminus \{0\}$ ($\mathcal{Q}$ essenziale) è un cono ($x \in F \Rightarrow \lambda x \in F$, $\lambda > 0$) quindi

$$F \cong (F \cap S^{n-1}) \times \mathbb{R}$$

$\{F' = F \cap S^{n-1}\}$ dà una decomposizione in celle di S^{n-1}.

Allo stesso modo:

$$s(G<F) \cong (s(G<F) \cap S^{2n-1}) \times \mathbb{R}$$

$K' = \{s(G<F)' = s(G<F) \cap S^{2n-1}\}$ è una decomposizione in celle di S^{2n-1}.

Il complesso d'ordine $\Delta K'$ corrisponde alla suddivisione baricentrica di K'. La cella $s(G<F)'$ è triangolata tramite tutte le catene:

$$(s(G<F) <) \; s(G_0 < F_0) < \cdots < s(G_k < F_k) \qquad (*)$$

Sia $K' \supset K'' = \{s(G<F)' \mid \operatorname{codim} G > 0\}$ $(\subset \bigcup H_\alpha)$ è un sottocomplesso. Allora $\Delta K'' \subset \Delta K'$ è una triangolazione di K''. Si ha:

$$\mathcal{M}(\mathcal{Q}) \cap S^{2n-1} = S^{2n-1} \setminus K''$$

si contrae sul sottocomplesso di $\Delta K'$ corrispondente ai simplessi che non hanno vertici in K'', cioè le catene con G_k camera (e quindi tutti i G_i camere).

Questo è esattamente $\Delta \mathcal{S}^c_{\mathcal{Q}}$.

Proposizione K complesso simpliciale, $L \subset K$ sottocomplesso. Sia K' il derivato di K, che contiene L' come sottocomplesso. Allora $K \setminus L$ si contrae sul sottocomplesso $L'' \subset K'$ dato dai simplessi $\sigma \in K'$ che non hanno vertici in L.

dim. $F : (K \setminus L) \times I \to K \setminus L$: se $x \in L''$, $F_t(x) = x$, $\forall t$.
Se $\sigma \in K' \setminus (L' \cup L'')$, allora $\sigma = [a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_h]$ dove gli $a_i \in L''$, $b_j \in L'$ $(k, h \geq 1)$. Se $x \in \sigma \setminus (L' \cup L'')$

$$x = \sum \lambda_i a_i + \sum \mu_j b_j \quad , \sum \lambda_i + \sum \mu_j = 1 \quad , 0 \leq \lambda_i, \mu_j \leq 1$$

e qualche $\lambda_i > 0$, qualche $\mu_j > 0$.

$1 - \alpha = \sum \lambda_i$, $\alpha = \sum \mu_j$, $\lambda_i' = \lambda_i / (1-\alpha)$, $\mu_j' = \mu_j / \alpha$,

quindi $x = (1-\alpha) \sum \lambda_i' a_i + \alpha \sum \mu_j' b_j$. Allora:

$$F_t(x) = (1 - t\alpha) \sum \lambda_i' a_i + t\alpha \sum \mu_j' b_j$$

$M(\mathcal{A}) = (M(\mathcal{A}) \cap S^{2n-1}) \times \mathbb{R}$, $M(\mathcal{A})$ si contrae su $M(\mathcal{A}) \cap S^{2n-1}$ e quindi si contrae su $\Delta \mathcal{S}_{\mathcal{A}}^{c}$

Abbiamo visto:

$$e(C \prec F) = \Delta\left(\mathcal{S}_{\mathcal{C}}^{\leq S(C \prec F)}\right) \overset{\text{pro}}{\cong} \Delta(\mathcal{S}^{\leq F}) \quad \text{è una cella.}$$

L'intersezione di due celle è unione di celle e inoltre:

$$\partial e(C \prec F) = \bigcup_{G < F} e(C.G \prec G)$$

Inoltre

$X = \{ e(C < F) \}$. è un CW-complesso

Teo $X \simeq \mathcal{M}(\mathcal{Q})$.

nota: X si può pensare come il CW-complesso "duale" alla stratificazione $\mathcal{S}^c_{\mathcal{Q}}$. Le celle $e(C<F) \cap s(C<F)$ in 1 pto.

Realizzazione $\Delta \mathcal{S}^c_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{Q})$

$\forall\ s(C<F) \ni p_{C<F} = x(F) + i\, x(\mu_F(C))$

$x(\mu_F(C))$ un punto in $\mu_F(C)$.

$\sigma \in \Delta \mathcal{S}^c_{\mathcal{Q}}$, $\sigma \leftrightarrow (s(C_1<F_1) < s(C_2<F_2) < \dots < s(C_k<F_k))$

$F_1 < \dots < F_k$, $C_i = C_k \cdot F_i$

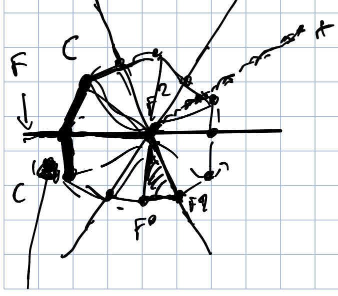
$|\sigma| = [p_{C_1<F_1}, \dots, p_{C_k<F_k}] = \{ \sum \lambda_i p_{C_i<F_i} \}$

$\mu_{\mathcal{Q}}: e(C<F) \xrightarrow{\simeq} e(F) = |\Delta \mathcal{S}_{|F|}| = |\Delta \mathcal{S}^{\leq F}| =$

$= \bigcup_{F_1 < \dots < F_k \leq F} [x(F_1), \dots, x(F_k)]$

$Q = \bigcup_{F \in \mathcal{S}} e(F)$ è un CW-complesso

"duale" alla stratificazione reale $(e(F) \cap F = x(F))$.



$F^0 < F^1 < F^2$

C, C', F,

$C < F$, $C' \not< F$

$x(C)$, $x(C')$, $x(F)$, $[x(C), x(F)]$, $[x(C'), x(F)]$

$e(F)$

- -

Seconda "esplicita" deformazione di $\mathcal{U}(Q)$ su X.

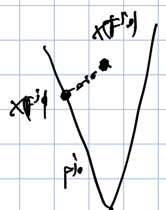
$$Q = \bigcup_{F \in S} e(F) \qquad\qquad x(F) \in F$$

definisco $\varphi_{C<F} : e(F) \to \mathcal{U}(Q)$

$$\varphi_{C<F}\left(x = \sum_{l=0}^{n} \lambda_l \, x(F^{j_l}) \right) = x + i \sum_{l=0}^{n} \lambda_l \, x(C.F^{j_l})$$

$F^{j_0} < \dots < F^{j_n} \leq F$

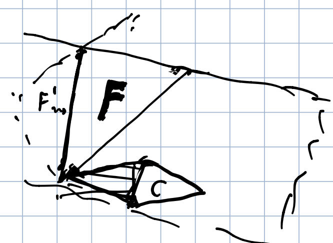
oss. $\operatorname{Im} \varphi_{C<F} \subset \mathcal{U}(Q)$. Se $\lambda_0 \neq 0$, $x \in F^{j_0}$



se $F < F'$, $\mu_F(C.F) \supset \mu_F(C.F')$

$\cup$

$\supset C.F'$



la camera $\mu_{F^{j_0}}(C.F^{j_0})$ contiene tutte le camere $C \cdot F^{j_l}$, $l = 0, \dots, n$.
$\Rightarrow$ tutti i $x(C.F^{j_l})$ sono contenuti in $\mu_{F^{j_0}}(C.F^{j_0})$.
Questo è connesso $\Rightarrow$ $\Im(\varphi_{C<F}(x)) \in$ ⟵ parte immaginaria

Ogni $x \in e(F)$ sta nell'interno di un unico simplesso, e questo definisce una applicazione $\varphi_{C<F} : e(F) \to \mathcal{U}(Q)$ (μ_Q dà un omeomorfismo con $e(F)$) $\operatorname{Im} \varphi_{C<F} = e(C<F)$ cella omeo a $e(F)$.

$X = \bigcup e(C < F)$

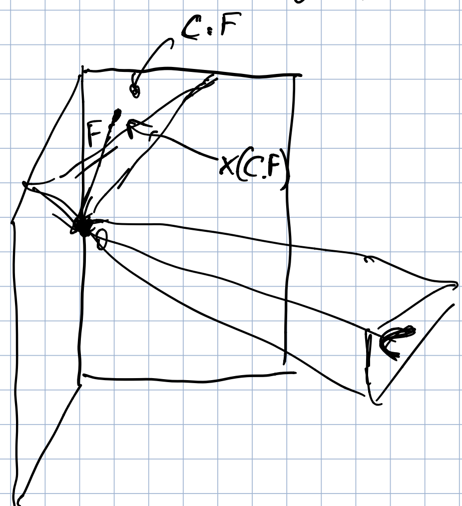
Trovare esplicita definizione di $\mathcal{U}(Q)$ su X.

I) $\mathcal{U}(Q) \longrightarrow pr_{\mathbb{R}}^{-1}(Q) \cap \mathring{\mathcal{U}}(Q) =: \hat{Q}$ $\qquad Q = \bigcup e(F)$

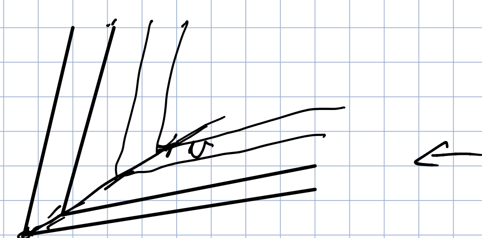
$\mathbb{R}^n$ si definisce linearmente su Q. La seconda deformazione le parte immaginarie $x + iy \longrightarrow x_\epsilon + iy$ (è stesso strato).

II) $\overline{\mu_F(C)}$ (chiusura di un cono su $Q_{|F|}$).

$y \in \overline{\mu_F(C)} \Rightarrow y = \mu(x(C.F)) + \alpha$ $\qquad \mu \geq 0,$ $\alpha \in \partial\overline{\mu_F(C)}$



$\overline{\mu_F(C)} = \coprod_{\mu \geq 0} \left(\partial\overline{\mu_F(C)} + \mu \cdot x(C.F)\right)$



$\epsilon = F^0 < F^1 < \dots < F^n \; (= \{0\})$ $\qquad$ catena massimale (F^j è j-codimensionale)

e anche C conessa.

$Y(\epsilon, C) = \{x + iy \in \mathcal{U}(Q) \mid x \in [x(F^0), \dots, x(F^n)], \; y \in \overline{C}\}$

$\underline{\text{ora}} \qquad \bigcup_{\epsilon, C} Y(\epsilon, C) = \hat{Q}$

$z = x + iy \in Y(\mathcal{C}, C)$ $\qquad$ $c = (F^0 < \dots < F^m)$

da $F^j < F^m$ si ha $\overline{\mu_{F^j}(C)} \supset \overline{\mu_{F^m}(C)} = \overline{C}$

per cui possiamo scrivere:

$$y = \mu_j \, x(C.F^j) + \alpha_j \qquad \mu_j \geq 0 \,, \ \alpha_j \in \partial \overline{\mu_{F_j}(C)}$$

$j=0 \Rightarrow F^0$ è una camera, $C.F^0 = F^0$, $\mu_{F^0}(C) = V$

∂ " $= \emptyset$

prenderò $\mu_0 = \lambda_0$ $\quad \left(x = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \, x(F^j)\right)$

---

en. $x + iy \in Y(\mathcal{C}, C)$ determina $\lambda_0, \dots, \lambda_m, \mu_0, \dots, \mu_m$.

Non tutti i μ_j si annullano. Infatti:

se $\lambda_0 \neq 0 \Rightarrow \mu_0 = \lambda_0 \neq 0$

Se $\lambda_0 = \dots = \lambda_{j-1} = 0$, $\lambda_j \neq 0$, $\Rightarrow \mu_j \neq 0$. Infatti:

$x \in F^j \Rightarrow y \notin \mathcal{O}_{|F^j|}$, $\Rightarrow y \notin \partial \overline{\mu_{F^j}(C)}$, cioè $y \in \mu_{F^j}(C)$, cioè $\mu_j > 0$

$$S(\lambda, \mu) = \sum_{j=0}^{m} \min\{\lambda_j, \mu_j\} \neq 0$$

$$\hat{z}(\lambda, \mu) = \frac{1}{S(\lambda,\mu)} \left[\sum_{j=0}^{m} \min(\lambda_j, \mu_j) \, x(F^j) + i \sum_{j=0}^{m} \min(\lambda_j, \mu_j) \, x(C.F^j) \right]$$

per costruzione sta in X

Ho definito: $Y(\varepsilon, C) \longrightarrow X \quad : \quad z = x + iy \longrightarrow \hat{z}(\lambda, \mu)$

Facciamo vedere che questo definisce un'applicazione

$$\bigcup Y(\varepsilon, C) = \hat{Q} \longrightarrow X$$