

Siano  $K = K_0 \supset K_1 \supset \dots \supset K_r^{(*)}$  la successione di complessi che si ottiene  
 e siano  $K_{i_0} \supset K_{i_1} \supset \dots \supset K_{i_s} (= M)$  quelli originari e minimi  $\mathfrak{f}_i$  che  
 siano celle critiche. Avuti  $K_{i,j+1} = K_{i,j} \setminus \{\sigma_{(i,j),\alpha_1}, \dots, \sigma_{(i,j),\alpha_{k_j}}\}$  con le  $\sigma$  critiche.  
 (poniamo avere di dimensioni diverse). Sia  $h_j$  la contrazione che  $K_{i,j+1} \rightarrow K_{i,j}$   
 (parallela come l'identità se  $i_{j+1} = i_{j+1}$ ). Sia anche  $\hat{h}_j: K_{i,j} \rightarrow K_{i,j+1}$  la mappa che  
 estende  $h_j$  a  $\sigma_{(i,j),\alpha}$  tramite l'identità e passaggio al proiettivo.

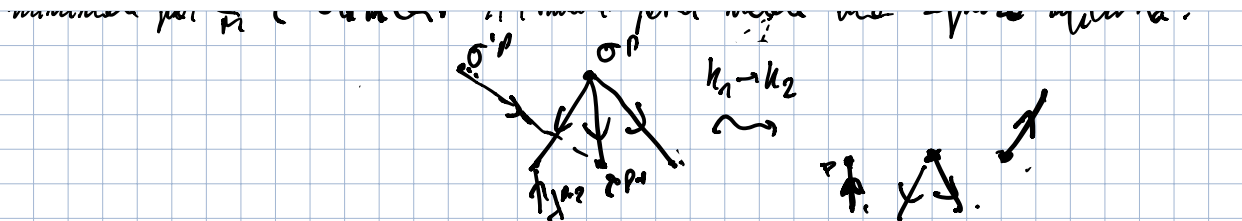
Allora  $K_r$  si ricostituisce a partire da  $K_r$  (che è un insieme di celle di dim  $0$ )  
 attaccando successivamente le celle  $\sigma_{(s-1),\alpha}, \sigma_{(s-1),\beta}, \dots$  ( $\{\sigma_{(s-1)}\} = K_r$ ) tramite  $h_{s-1}$ ,  
 $h'_{s-2} = \tilde{h}_{s-1} \circ h_{s-2}$ ,  $h'_{s-3} = \tilde{h}_{s-1} \circ \tilde{h}_{s-2} \circ h_{s-3}$ , e così via. Quindi possiamo  
 pensare le celle  $\sigma_{(i,j),\alpha}$  come  $\tilde{h}'_{(j)}(\sigma_{(i,j),\alpha})$ .

$$\hat{h}'_j = \tilde{h}_{s-1} \circ \tilde{h}_{s-2} \circ \dots \circ \hat{h}_j, \quad \tilde{\sigma}_{(i,j),\alpha} = \hat{h}'_j(\sigma_{(i,j),\alpha})$$

Se  $\phi_{(i,j),\alpha}$  è la forma di attaccamento di  $\sigma_{(i,j),\alpha}$  su  $K_{i,j+1}$ ,  
 allora le  $\tilde{\sigma}_{(s-1),\alpha}$  a  $K_{i,j} (= 0 \text{ dimensional})$   
 tramite  $h_{s-1} \circ \phi_{(s-1),\alpha}$ , poi le  $\tilde{\sigma}_{(s-2),\beta}$  tramite  
 $\tilde{h}_{s-1} \circ h_{s-2} \circ \phi_{(s-2),\beta}$  su  $K$

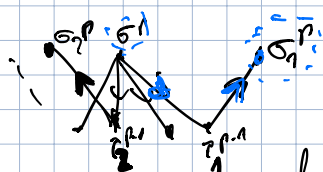
Se il I passo da  $K_0$  a  $K_1$  è fatto con contrazioni, si conclude  
 per induzione.

Sono allora  $\mathfrak{f}_i$  elementi minimi di  $K$  tutti critici; sia  $\sigma^p$   
 di dim massima. Possiamo anche scegliere  $\sigma^p$  in modo che  $\forall \text{ faccia}$   
 $\tau^{p-1} \wedge \sigma^p$  si abbia che se  $\tau^{p-1} \wedge (\sigma^p)' \notin M$ , allora  $\sigma^p$  è  
 minimo di  $K$  e critica. Altrimenti otteniamo una successione di...



Altrove passando da  $K_1$  a  $K_2$  le celle  $\tau^{p-1} \prec \sigma^p$  che rimangono accoppiate con un  $\lambda^{p-2}$  sono minimali per  $\zeta_1$  (e quelle  $\tau^{p-1}$  non lo sono) Quindi se guardo solo tutte critiche, solo quelle con cui  $\sigma^p$  ha  $\zeta_1$  e anche  $h_1(\sigma)$  o  $h_1(\tau)$ . Altrimenti, in  $K_2$  rimangono le  $\sigma_i^p$  che hanno faccine qualche  $\tau^{p-1} \prec \sigma^p$  e h.c.  $\tau^{p-1} \prec \sigma_i^p \in M$ .

Passando da  $K_2$  a  $K_3$  le coppie delle celle saranno:

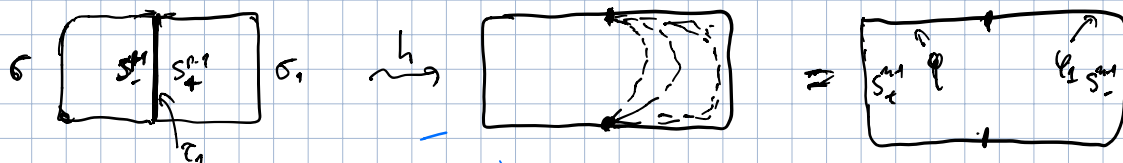


$$\tau_1^{p-1} \prec \sigma_1^p, \tau_2^{p-1} \prec \sigma_2^p, \dots$$

$$\text{Sia } h: K_2 \rightarrow K_3$$

$$\text{Sia } \varphi: S^{p-1} \rightarrow K_2$$

la prima d'attacco di  $\sigma^p$ ; dopo  $h$  la prima si modifica in  $h \circ \varphi$ : consiste in questo. Sia  $\varphi_1: S^{p-1} \rightarrow K_2$  è la prima di attacco di  $\sigma_1^p$ . A meno di omeotopia, possiamo supporre che  $\varphi(S^{p-1}) = \tau_2^{p-1} = \varphi_1(S^{p-1})$ ,  $h \circ \varphi|_{S^{p-1}} = \varphi_1|_{S^{p-1}}$

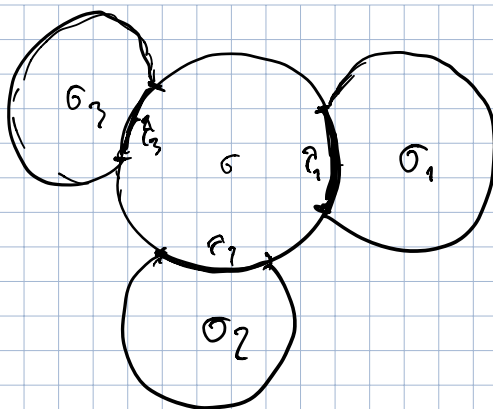


guardi le nuove celle  $\tilde{h}(\sigma)$  le faccine di attacco

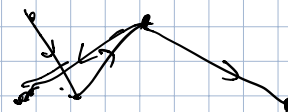
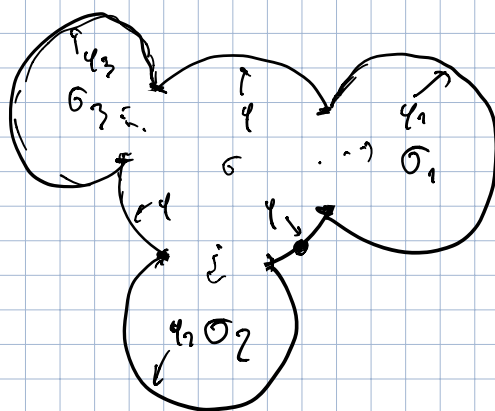
$$\tilde{\varphi}: S^{n-1} = S_+^{n-1} \cup S_-^{n-1} = \begin{cases} \varphi|_{S_+^{n-1}} \\ \varphi|_{S_-^{n-1}} \end{cases}$$

lo stesso accade per tutte le celle  $\tau_2^{p-1} \prec \sigma_2^p$ , ecc..

$$\tilde{h}(\sigma) =$$



$$\tilde{h}$$



$$\lambda^{p-1} \text{ critica } h \circ h$$

Per indagine applicata a  $K_2$ , con  $M' = M \setminus \{\tau_1 \sigma_1, \tau_2 \sigma_2, \dots\}$  in cui  $\sigma_1^p, \sigma_2^p, \dots$  sono critiche,  $K_2 \cong (K_2)_c$  e  $[\hat{\sigma}_1^p: \tilde{\lambda}^{p-1}]$  è data dalla formula; i commi in  $K_2$  tra  $\sigma_1^p$  e  $\lambda^{p-1}$  sono annullati in  $K$ . Similmente  $[\hat{\sigma}_2^p: \tilde{\lambda}^{p-1}]$ , ecc. Si noti che si trova la stessa  $\tilde{\lambda}^{p-1}$  partendo da  $K_2$  o da  $K_1$ :  $\tilde{\lambda}^{p-1} = h'(\lambda^{p-1})$ . Anche:

$$[h'(\hat{\sigma}): h'(\tilde{\lambda}^{p-1})] = [h''(\hat{h}(\sigma)): h''(\lambda^{p-1})] \quad \text{perché } \hat{h} \text{ non annulla } \lambda^{p-1}$$

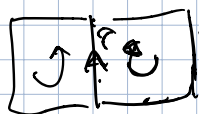
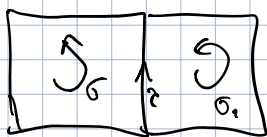
Per come si calcola  $[\cdot: \cdot]$ , si prende un punto generico  $p \in h''(\lambda^{p-1}) = \tilde{\lambda}^{p-1}$  e si contano (con segno) i punti  $q \in \partial \hat{h}(\sigma)$  t.c.  $h''(q) = p$ .

Se  $q \in \sigma \setminus (\tau_1 \sigma_1 \cup \tau_2 \sigma_2 \cup \dots)$  e si identifica  $\hat{h}(\sigma)$  come  $\sigma$ , allora si contribuirà +1; questo accade se  $\lambda^{p-1} \in \sigma^p$ , poiché i

puti di  $\sigma(\tau_1, \tau_2, \dots)$  sono attaccati a alle critiche.

Si  $q \in \sigma_1 \cap \tau_1$ , si deve avere certo dell'involuzione di  $\sigma_1$  rispetto a  $\hat{h}|_{\sigma_1} = \hat{\sigma}$ . Si ha che  $\hat{\sigma}$  e  $\sigma_1$  hanno la stessa involuzione sicché il numero 
$$= [\sigma_1^n : \tau^{n+1}] [\sigma_1^n : \tau^{n+1}] = \pm 1.$$

$$\begin{array}{c}
 H_p(\sigma, \sigma, x) \xrightarrow{\cong} H_p(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}, x) \cong H_p(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}, 0) \longrightarrow H_p(\sigma_1, \sigma_2, x) \\
 \begin{array}{ccc}
 x \in \sigma & \xrightarrow{\partial_1} & H_{p-1}(\partial\sigma, \partial\sigma, x) \cong H_{p-1}(\partial\sigma_1, \partial\sigma_2, x) \\
 & \xrightarrow{\partial_2} & H_{p-1}(\partial\sigma_1, \partial\sigma_2, x) \\
 & \xrightarrow{\partial_2} & H_{p-1}(\partial\sigma_1, \partial\sigma_2, x)
 \end{array}
 \end{array}$$



Anche i  $q \in \sigma_1 \setminus \tau_1$  danno luogo a  $-[\sigma_1^p; \tau_1^p][\sigma_1^p; \tau_1^p][\hat{\sigma}_1^p; \hat{\tau}_1^p]$   
 Similmente per i  $q \in \sigma_2 \setminus \tau_2$ , ecc. Si trova così la formula.

Corollario 1 Sia  $\mathcal{H}$  convesso. Se tutte le celle critiche di  $\mathcal{H}$  hanno dimensione  $d$ , allora  $n \geq \sum_{i \in \mathcal{S}} V S_i^d$

dim  $K_c$  ha come celle di dim  $d$  e 0-celle. Se  $d=1$ ,  $K_c$  è un grof connesso, quindi  $K_c \cong VS^1$ . Se  $d>1$ , allora può esserci solo una 0-cella e  $K_c \cong VS_d^d$ .

Corollario 2. Il numero delle celle attive di  $d_{in} > 0$  hanno tutte  $d_{in} \geq d_{c}$ .



allora  $K$  è  $(d-1)$ -connesso (cioè  $\pi_j(K) = 0$  se  $j < d$ ).

dim. Se  $d=1$ ,  $K$  è connesso in ipotesi. Altrimenti,  $K$  ha una 0-cella e  $q$ -celle con  $q \geq d$ , per cui il teorema delle approssimazioni cellulari.

Lemma  $\varphi: P \rightarrow Q$  morfismo di posets ( $a \leq b \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$ ).

Alla se  $M_q$  è un matching ciclico su  $f(q)$ , allora  $M = \bigcup_{q \in Q} M_q$  è matching ciclico su  $P$ .

dim. Se  $c: a_0 \succ b_1 \succ a_1 \succ b_2 \succ a_2 \succ \dots \succ b_n \succ a_n$

un cammino elemento di  $P$ . Si ha:  $\varphi(b_i) = \varphi(a_i)$  poiché  $(a_i, b_i) \in M$  poiché  $\in M_{q_i}$  per qualche  $q_i \in Q$ . Inoltre  $\varphi(a_i) \geq \varphi(b_{i+1})$  per l'ipotesi. Quindi  $\varphi$  è debolmente decrescente lungo  $c$ . Se è costante,  $c$  non si chiude in l'aciclicità di  $M_q$ . Altrimenti  $c$  non può chiudere poiché  $\varphi(a_i) > \varphi(b_n)$ .

Def. una proprietà  $P$  su un grafo  $G$  con  $V(G)$  vertici ed  $E(G)$  lati è una famiglia  $P$  di sottografi pieni di  $G$ , chiusa rispetto all'inclusione.

Allora  $K_P$  corrisponde a un complesso simpliciale astratto con vertici  $V(G)$ .

Esempi. Sottografi  $P$  con al più  $n$  vertici.

con al più  $k$  lati.

$P$  foresta  $\subset G$

$P \subset G$  tale che ogni componente connessa di  $P$  ha al max  $n$  vertici: se  $n=1$ , si indica il complesso simpliciale con  $\text{Ind}_1(G)$ .

In generale, con  $\text{Ind}_k(G)$ .

Definizione  $L_n$  grafo lineare  $a_1 - a_2 - \dots - a_n$  con  $n$  vertici. Allora ( $d \geq 3$ )

$$Ind_{d-2}(L_n) \cong \begin{cases} S^{dq-2q-1} & \text{se } n=dq \text{ o } n=dq-1 \\ * & \text{altrimenti} \end{cases}$$

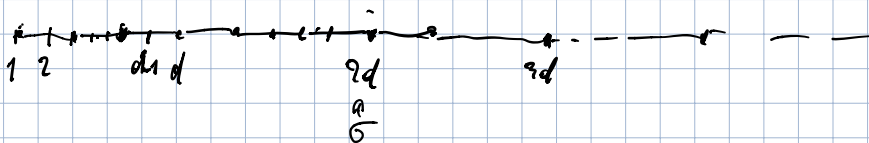
dim.  $n = dq + r$ ,  $0 \leq r < d$ ,  $K = \mathcal{I}(Ind_{d-2}(L_n))$

$$Q = \{ c_d > c_{2d} > c_{3d} > \dots > c_{qd} > c_* \} \quad Q \text{ tot. ordinato}$$

$f: K \rightarrow Q$  in questo modo:

se  $\sigma \in K$  non contiene multipli di  $d$  allora  $f(\sigma) = c_*$ .  
Altrimenti  $f(\sigma) = c_{jd}$  se  $jd$  è il min. multiplo di  $d$  che i vertici di  $\sigma$

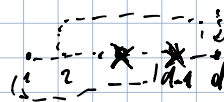
prop.  $\sigma > \sigma' \Rightarrow f(\sigma) \geq f(\sigma')$   $f$  è morfismo di pos.



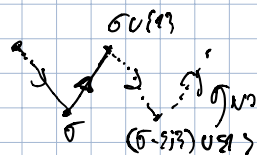
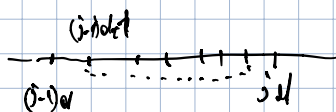
In  $f^{-1}(c_d)$  abbiamo il matching

$$M_1 = \{ (\sigma \setminus \{1\}, \sigma \cup \{1\}) \}$$

$$\sigma \in f^{-1}(c_d) \Rightarrow \{2, \dots, d-1\} \not\subseteq \sigma$$



$$\sigma \in f^{-1}(c_{jd}) \quad M_j = \{ (\sigma \setminus \{(j-1)d+1\}, \sigma \cup \{(j-1)d+1\}) \}$$



in Dom.  $M_i$  è aciclico.

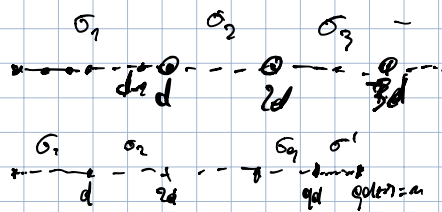
Analizza il lemma  $M = \bigcup U_i$ ; è ciclico su tutto  $U$ .

$f^{-1}(c_*) = \{ \sigma \mid \sigma \neq id \} = U_*$  è un sottocomplesso di  
alle critiche.

Ogni  $U_i$  è un matching perfetto su  $f^{-1}(c_{id})$

Per il lemma  $K \approx K_*$   $\Rightarrow$

$$\sigma \in U_*, \quad \sigma = \sigma_1 \sqcup \sigma_2 \sqcup \dots \sqcup \sigma'_1$$



$$\sigma_1 \in \text{Incl}_{d-2}(L_{d-1}), \dots$$

$$\sigma'_1 \in \text{Incl}_{d-2}(L_{d-1}), \dots, \sigma'_1 \in \text{Incl}_{d-2}(L_n)$$

richiamo:  $L, M$  comp. simpliciali (abiti) e parole

$$\| K = \{ \sigma \sqcup \sigma' \mid \sigma \in L, \sigma' \in M \} \Rightarrow \| K \| = \| L \| * \| M \|$$

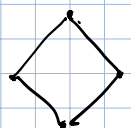
join di  $X, Y$ : insieme di tutti i seguenti che vengono cupiti di  $X$   
con un path di  $Y$ .

$$X * Y = \frac{X * Y * I}{\begin{matrix} (x, y, 0) \sim (x, y, 1) \\ (x, y, 1) \sim (x', y, 1) \end{matrix}}$$

esempio  $X * \{pt\} =$   
cono su  $X$  (cachetabile)



$$S^0 * S^0 = S^1$$



$$S^p * S^q = S^{p+q+1}$$

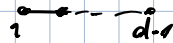
$$S^p * S^0 = S^{p+1}$$



$$S^{p_1} * S^{p_2} * \dots * S^{p_k} = S^{p_1 + \dots + p_k + k - 1}$$

$$K_d = \text{Ind}_{d-2}(L_{d-1}) * \dots * \text{Ind}_{d-2}(L_{d-1}) * \text{Ind}_{d-2}(L_2)$$

$$\text{Ind}_{d-2}(L_{d-1}) \cong S^{d-3}$$



$$\text{Ind}_{d-2}(L_n) :$$

$$n=0 \quad \emptyset$$

$$n=d-1 \quad S^{d-3}$$

$$n < d-1 \quad \text{h.h. : schenken} \Rightarrow \text{un stylo} \Rightarrow \text{cubifiable}$$

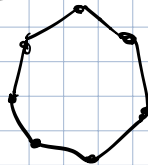
$$\sum_{n < d-1} K_n = [\dots] * (\text{cubifiable}) \Rightarrow K_d \text{ cubifiable}$$

$$n=0: (S^{d-3}) * 9 = S^{9(d-3)+9-1}$$

$$n=d-1: (S^{d-3}) * (9+1) = S^{(d-3)(9+1)+9}$$

$$G: \text{---}$$

$$G =$$



$$\text{Ind}(G)$$