def 1) Un sottocomplesso $L \subset K$ è un complesso le cui celle sono celle di K.

2) K si dice normale se ogni cella chiusa è un sottocomplesso (i.e. $\tau \cap \partial\sigma \neq \emptyset \Rightarrow \tau \subset \partial\sigma$, $\partial\sigma = \bigcup_{\tau < \sigma} \tau$).

K regolare $\Rightarrow$ K normale.

Posso considerare diagramma di Hasse di $\mathcal{F}(K) = P$. $H \subset P \times P$ è fatto da $\tau^{(p)} < \sigma^{(p+1)}$ dove τ è faccia regolare di σ. Cammini alternati: le chiuse, M aciclico $\Leftrightarrow$ Γ_M è aciclico.

<u>Teorema</u>. K CW-complesso normale, M campo gradiente su $\mathcal{F}(K)$, $c_i = \#$ i-celle di K.

i) Se le celle critiche $K_c \subset K$ formano un sottocomplesso allora $K \searrow K_c$

ii) In generale, K è $\simeq$ a un CW-complesso K_c avente c_i celle di dim i $\tilde{\sigma}_j$, ognuna corrispondente a σ_j critica.

iii) $[\hat{\tau}^p : \hat{\sigma}^{p+1}] = \sum_c w(c)$

(c cammino alternato in Γ_M che congiunge σ^{p+1} con τ^p,

$w(c) = (-1)^k \prod$ (incidenze di celle consecutive)

$c = \sigma^{p+1} \searrow \tau_1^p \nearrow \sigma_1^{p+1} \searrow \tau_2^p \nearrow \sigma_2^{p+1} \searrow \cdots \searrow \tau_k^p \nearrow \sigma_k^{p+1} \searrow \tau^p$

note 1) l'incidenza $[\tau_i^p : \sigma_i^{p+1}] = \pm 1$

2) Il punto i) è l'inverso della prop. vista: $K \searrow L$ allora

f di M. Su L si estende a K senza altre celle critiche.

Viceversa, $M|K\setminus L$ è un matching perfetto (tutte le celle di $K\setminus L$ si accoppiano fra di loro) $\Rightarrow K \searrow L$.

dim. Introduciamo una relazione d'ordine parziale $\leq_M$ su $K\setminus L$:

$\sigma \leq_M \tau \iff \exists$ cammino orientato in Γ_M che congiunge σ e τ.

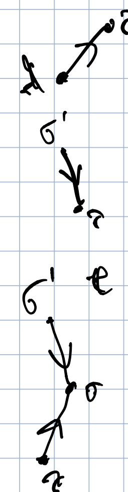
Γ_M è aciclico $\Rightarrow$ relazione d'ordine parziale.

i). Per induzione. Se $K = K_c$, fine. Altrimenti, in $K - K_c$ una cella τ^p minimale per $\leq_M$, di dimensione massima possibile.

Ogni lato di Γ_M che finisce in $K\setminus K_c$, comincia in $K \setminus K_c$.

τ^p non è critica $\Rightarrow$ τ^p è accoppiato a una cella in $K\setminus K_c$

$\tau^p < \sigma^{p+1} \in M$ (non può essere $\tau^p > \lambda^{p-1} \in M$ altrimenti $\lambda \leq_M \tau$)



τ non è coperta da altre celle $\neq \sigma$ (altrimenti non sarebbe minima) $\Rightarrow \tau$ è faccia libera di σ. Inoltre σ non è faccia di altre $\sigma' > \sigma$, altrimenti $\sigma' \in K\setminus K_c$ e $\sigma' \leq_M \sigma$ e non è un minimo per $\leq_M$ di dim $\geq p$.

Quindi posso fare collassamento elementare cancellando τ e σ

$K \searrow K' = K - \{\sigma\} \cup \{\tau\}$.

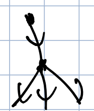
$K'_c = K_c$. Si conclude per induzione.

ii) Per induzione sul numero m di celle di K ($m = 0, 1$ ovvio).

Sia τ^p minimale per Γ_M, di dimensione massima possibile.

Se τ^p non è critica, come in i) $\exists\ \sigma^{p+1} > \tau^p \in M$ e τ non è coperta da altre celle e σ lo stesso. Possiamo fare un collassamento elementare $K \searrow K' = K - \{\sigma\}\cup\{\tau\}$. K' ha le stesse celle critiche e per induzione si conclude.

Sia τ^p critica. Allora τ^p non è faccia di altre celle di K. $\varphi : D^p \to K$ forma caratteristica, $\varphi' : \partial D^p = S^{p-1} \to K'$



$K = K' \cup_{\varphi'} D^p$. K' ha meno celle di K, ha c_i celle critiche se $i \neq p$, e $c_p - 1$ p-celle critiche.

$h : K' \simeq K'_c$ con c_i i-celle se $i \neq p$, $c_p - 1$ p-celle

$$K = K' \cup_{\varphi'} D^p \xrightarrow{H} K'_c \cup_{h \circ \varphi'} D^p = K_c \qquad H = \begin{cases} h & \text{su } K' \\ id & \text{su } D^p \end{cases}$$

<u>esercizio</u>: h equivalenza omotopica $\Rightarrow$ H è equiv. omotopica.

iii) Quello che si è fatto in ii): si ha una successione di complessi:

$K = K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_t$ $\qquad K_{i+1}$ si ottiene da K_i

se $\exists$ elementi minimali per $\leq_\mu$ non critici, faccio collassamenti $h_i : K_i \searrow K_{i+1}$. Se gli elem. minimali sono tutti critici: $\sigma_1, \dots, \sigma_j$ li stacco $K_{i+1} = K_i \setminus \{\sigma_1, \dots, \sigma_j\}$

Il complesso K_c finale lo ricostruisco da K_t (ha solo 0-celle).

Per dim. la formula, posso fare induzione.

Se nel 1° passo faccio collassamenti, le celle critiche rimangono le stesse ($K \searrow K_1$) e per induzione su K_1 ha la formula che calcola cammini $c : \sigma^{p+1} \to \tau^p$. I cammini ellittici che congiungono σ con τ in K stanno in K' (nessun cammino può coinvolgere delle celle che ho collezionato, per la minimalità di quello}

[Kozlov: combinatorial Algebraic Topology]