3/3/2020

$V = \mathbb{R}^n$, $(,) : V \times V \to \mathbb{R}$ prod. scalare > 0.

Def La riflessione (ortogonale) relativa a un vettore $\alpha \in V$ è l'applicazione lineare $r_\alpha \in O(V)$ t.c., posto

$$V = \mathrm{Span}(\alpha) \overset{\perp}{\oplus} H_\alpha ,$$

con $H_\alpha = (\mathrm{Span}\, \alpha)^\perp$, valga:

$$r_\alpha(c\alpha + \beta) = -c\alpha + \beta \quad , c \in \mathbb{R} , \beta \in H_\alpha$$

nota: $r_\alpha = r_{t\alpha}$, $t \in \mathbb{R}_*$.

Lemma Si ha:

$$r_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$$

dim. $r_\alpha(\beta) = \beta$ se $\beta \in H_\alpha$; $r_\alpha(c\alpha) = c\alpha - 2c\alpha = -c\alpha$, per cui vale.

def. Un sottogruppo finito $W \subset O(V)$ che ha un insieme di generatori dato da riflessioni si dirà un gruppo finito di riflessioni

Esempi:

- $I_2(m)$
- A_{n-1} (σ_n)
- B_n $\quad 1 \to \mathbb{Z}_2^n \to B_n \to \sigma_n \to 1$
- D_n $\quad 1 \to \mathbb{Z}_2^{n-1} \to D_n \to \sigma_n \to 1$

Lemma $t \in O(V) \Rightarrow t r_\alpha t^{-1} = r_{t(\alpha)}$. Quindi $w \in W$, $r_\alpha \in W \Rightarrow r_{w(\alpha)} \in W$

4/3/2020 $\leq$ ordine parziale su V t.c.

i) $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha+\gamma \leq \beta+\gamma \quad \forall \gamma$

ii) $\alpha \leq \beta$, $c>0 \Rightarrow c\alpha \leq c\beta$

$c<0 \Rightarrow c\alpha \geq c\beta$

<u>oss</u>. Sia $C = \{\alpha \geq 0\}$. Allora C è un cono convesso con vertice in O, non contenente rette per O.

<u>dim</u> $c\alpha \geq 0$ per ii) e $\alpha,\beta \geq 0 \Rightarrow \alpha+\beta \overset{\text{per i)}}{\geq} \beta \geq 0$, quindi è cono. Inoltre $\alpha \in C$, $\alpha \neq 0 \Rightarrow -\alpha \notin C$ $\blacksquare$.

Viceversa, dato C cono convesso (con vertice O) e non contenente rette per O, posto $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \in C$, la relazione è d'ordine parziale:

$\alpha \leq \alpha$; $\alpha \leq \beta$, $\beta \leq \alpha \Rightarrow \beta-\alpha \in C$, $\alpha-\beta \in C \Rightarrow \alpha=\beta$;

$\alpha \leq \beta$, $\beta \leq \gamma \Rightarrow \beta-\alpha \in C$, $\gamma-\beta \in C \Rightarrow \gamma-\alpha \in C \Leftrightarrow \alpha \leq \gamma$.

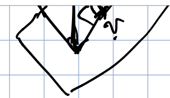
<u>oss</u> $\alpha \leq 0$ se e solo se $\alpha \in -C$. $C \cap -C = \{0\}$

Se $\leq$ è un ordine totale soddisfacente (i) e (ii), allora $\forall \alpha \neq 0$, $\alpha \in C$ o $\alpha \in -C$ quindi $C \cup -C = V$. Ne segue che $\forall$ ogni retta l che passa per O, le due semirette di $l \setminus \{O\}$ stanno una in C e una in $-C$.

NOTA: se un cono convesso C è $\neq V$, allora $\bar{C} \subset \{(v,x) \geq 0\}$ per qualche v.

Infatti: sia $w \notin C$ e sia $v \in C$ l'unico vettore t.c. $\|\alpha = v-w\|$ sia minima. Allora $\{(\alpha,x) \geq 0\} \supset C$, altrimenti se $u \in C$ e

fosse $(\alpha,u) < 0$, i $(1-t)v + tu$, con $0<t\ll 1$, avrebbero



distanza inferiore a v da α.

Sia quindi v_1 t.c. $\bar{C} \subset \{(v_1, x) \geq 0\}$. Allora $-\bar{C} \subset \{(v_1, x) \leq 0\}$ e $\bar{C} \cap -\bar{C} = \{(v_1, x) = 0\} = H^1$ di codim 1. Sia $H^1_+ = (v_1, x) > 0$ $H^1_- = \{(v_1, x) < 0\}$; quindi $\bar{C} \subset \bar{H}^1_+$, $-\bar{C} \subset \bar{H}^1_-$. Allo stesso modo $(C \cap \bar{H}^1) \cup (-C \cap \bar{H}^1) = H^1$ e quindi $\exists$ $H^2 \subset H^1$ di codim 2 (in V) con $\bar{H}^2_+ \supset C \cap H^1$, $\bar{H}^2_- \supset -C \cap H^1$. $H^2_\pm$ può essere individuato da un $v_2 (\neq \lambda v_1)$ con $H^2_+ = \{x \in H^1 \mid (v_2, x) > 0\}$.

v_2 non è unico (si può cambiare con $\lambda v_2 + \mu v_1$).

Andando avanti si deduce che $\exists$ base $v_1, v_2, \dots, v_n$ (modificabile con una matrice triangolare superiore) t.c.

$C =$

$= \{(v_1, x) > 0\} \cup \{(v_1, x) = 0, (v_2, x) > 0\} \cup \dots \cup \{(v_1, x) = \dots = (v_{n-1}, x) = 0, (v_n, x) > 0\} \cup \{0\}$

$= H^1_+ \cup (H^1 \cap H^2_+) \cup \dots \cup (H^1 \cap \dots \cap H^{n-1} \cap H^n_+) \cup \{0\}$.

(si può dire che C è dato da una bandiera di semispazi aperti).

<u>Oss</u>. Se si sceglie una base $v_1, \dots, v_n$ e si dice che

$x \leq y \iff x = \sum x_i v_i$, $y = \sum y_i v_i$ e il primo $x_i \neq y_i$ è $<$,

$\iff y - x = \sum (y_i - x_i) v_i$ e il primo coeff $\neq 0$ è > 0,

questo equivale a definire C come $\{x = \sum x_i v_i \mid$ il primo $x_i \neq 0$ è $> 0\}$ che dà la bandiera; detto $H^1 = \langle v_2, \dots, v_n \rangle, \dots, H^n = \langle v_{n+1}, \dots, v_n \rangle$ e $H^1_+ \ni v_1$, $H^2_+ \ni v_2, \dots, H^n_+ \ni v_n, \dots, H^n_+ \ni v_n$.

<u>def</u> Φ sistema di radici. $\Pi \subset \Phi$ <u>sistema positivo</u> se $\exists$ ordine totale su V t.c. $\Pi = \Phi_+$. Siccome se $\alpha > 0$ allora

$-\alpha < 0$, segue che $\Phi = \Pi \sqcup -\Pi$

def Un sistema semplice di radici è un $\Delta \subset \Phi$ t.c. Δ genera Span Φ e $\forall \alpha \in \Phi$, α è combinazione delle radici semplici a coefficienti dello stesso segno (tutti ≥ 0 o tutti ≤ 0).

oss Se il cono C che dà l'ordine per cui Π è positivo è dato dalle bandiere $H^1 \supset H^2 \supset \cdots$, poiché Π è finito si può modificare C in un C' dato da $H'^1 \supset H'^2 \supset \cdots$ e tale che Π è >0 per C', con $\Pi \subset H'^1_+$.
In altri termini, ogni sistema positivo Π è dato prendendo un iperpiano H che non contiene radici e prendendo $\Pi = \Phi \cap H_+$.

Teorema Ogni Δ sistema semplice è contenuto in un unico sistema positivo.
dim. Sia $\Pi = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha = \sum x_i \delta_i,\ x_i \geq 0\}$, $\Delta = \{\delta_i\}$.
e l'ordinamento è quello indotto dalla base Δ (ordinata) estesa a V.
Sia $\Pi' \supset \Delta$ positivo, contenuto in $(v, x) > 0$. Allora $(v, \delta_i) \geq 0$, $\forall i$ e quindi $(v, \sum x_i \delta_i) = \sum x_i (v, \delta_i) \geq 0$ se gli $x_i \geq 0$. Quindi $\Pi' \supset \Pi$ ma allora $\Pi' = \Pi$.
Oppure: se $\Delta > 0$, allora tutte le comb. a coeff. >0 sono >0.

Teorema Ogni Π positivo contiene un unico Δ semplice.
dim Sia Δ minimale t.c. ogni Π si scrive come combinazione lineare a coeff. ≥ 0 di Δ. Allora

$\forall \alpha, \beta \in \Delta, \quad (\alpha, \beta) \leq 0$. Altrimenti: $r_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha =$

$= \beta - c\alpha$ con $c > 0$. Se $r_\alpha(\beta) > 0 \Rightarrow$

$$\beta - c\alpha = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma = c_\beta \beta + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma$$

$c_\beta < 1 \qquad (1-c_\beta)\beta = c\alpha + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma$ è contr. > 0

$\underbrace{}_{\text{e quindi elimino } \beta}$

$c_\beta \geq 1 \qquad (c_\beta - 1)\beta + c\alpha + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma = 0$ ma perchè i coeff. sono tutti ≥ 0.

Se $r_\alpha(\beta) < 0 \qquad \beta - c\alpha = c_\alpha \alpha + \sum_{\gamma \neq \alpha} c_\gamma \gamma \qquad c + c_\alpha > 0$ posso eliminare α

$c + c_\alpha \leq 0$

Allora $\quad -\beta + (c + c_\alpha)\alpha + \sum_{\gamma \neq \alpha} c_\gamma \gamma = 0$

ma tutti i coeff. sono ≤ 0.

Dimostriamo ora che Δ è indipendente.

$$\sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha \alpha = 0 \qquad \text{Riscriviamo } \sum b_\beta \beta = \sum c_\gamma \gamma = \sigma$$

a coeff. positivi

Allora $\quad 0 \leq (\sigma, \sigma) = \left(\sum b_\beta \beta, \sum c_\gamma \gamma\right) \leq 0 \Rightarrow \sigma = 0 \Rightarrow$

contraddizione.

L'unicità di Δ deriva dal fatto che i $\delta \in \Delta$ sono esattamente le radici non decomponibili come

$$\delta = \sum a_i \alpha_i, \quad a_i > 0, \quad \alpha_i \in \Pi.$$

Lemma Δ sistema semplice, $\Delta \subset \Pi$. Allora se $\alpha \in \Delta$,

$$\begin{cases} s_\alpha(\alpha) = -\alpha \quad (\in -\Pi) \\ s_\alpha(\Pi \setminus \{\alpha\}) = \Pi \setminus \{\alpha\} \end{cases}$$

dim La prima è ovvia. Se $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} a_\gamma \gamma$, $a_\gamma \geq 0$,

$$s_\alpha(\beta) = -a_\alpha \alpha + \sum_{\gamma \neq \alpha} a_\gamma \left(\gamma - \frac{2(\gamma,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \alpha\right) =$$

$$= \sum_{\gamma \neq \alpha} a_\gamma \gamma - \left(a_\alpha + \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{2(\gamma,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\right) \alpha \qquad > 0$$ perché almeno un a_γ, $\gamma \neq \alpha$, è > 0

Teorema Due sistemi positivi (o semplici) sono coniugati per W.

dim Siano Π e Π' positivi. Per induzione su $n = \#(\Pi \cap -\Pi')$.
$n = 0$, coincidono. Se $n > 0$, se $\Delta \subset \Pi$ non è $\Delta \subset \Pi'$.
Quindi $\exists\ \alpha \in \Delta \cap -\Pi'$. Per il lemma $\#(s_\alpha \Pi \cap -\Pi') = n-1$
quindi per induzione si conclude.

---

def $\beta \in \Phi$, $ht(\beta) = \sum c_\alpha$ se $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$ $\quad \left(ht(\beta) = 1 \text{ se } \beta \in \Delta\right)$

Teorema W è generato dalle $s_\alpha \in \Delta$

dim Sia $W' = \langle s_\alpha \in \Delta \rangle$. Dato $\beta \in \Pi$, dimostriamo che $\exists$ $w \in W'$ t.c. $w(\beta) \in \Delta$. Scegliamo da $W'\beta \cap \Pi$ un elemento di ht minima, γ. Sia $\gamma = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$. Da

$\circ$ $(\gamma,\gamma) = \sum c_\alpha(\gamma,\alpha)$ dove $\exists\, \alpha\in\Delta$ con $(\gamma,\alpha) > 0$.

Se $\gamma = \alpha$, ok. Altrimenti $s_\alpha(\gamma) = \gamma - 2\frac{(\gamma,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha > 0$ per il lemma ma $ht\, s_\alpha(\gamma) < ht\,\gamma$, contraddizione.

Quindi $\gamma = \alpha \in \Delta$.

Quindi $W'\Delta \supseteq \Pi$. Ma se $\beta \in -\Pi$, $-\beta \in \Pi$ quindi $w\alpha = -\beta$, $\alpha\in\Delta$. Allora $(ws_\alpha)\alpha = \beta$.

Quindi $W'\Delta = \Phi$. Se $s_\beta \in W$, $\beta = w\alpha$, $\alpha \in \Delta$ $w \in W'$, $\Rightarrow$ $s_\beta = s_{w\alpha} = w s_\alpha w^{-1} \in W'$. $\square$

Funzione lunghezza (rispetto a Δ): $\ldots w = s_1 \cdots s_n \ldots$

$$\ell(w) = n$$

Fissato Δ e Π sia

$$n(w) = \#(\Pi \cap w^{-1}(-\Pi))$$

<u>Prop</u> $n(w) \le \ell(w)$ $(\alpha\in\Delta,\ w\in W)$

Infatti $n(ws_\alpha) = \begin{cases} n(w)+1 & \text{se } w\alpha > 0 \\ n(w)-1 & \text{se } w\alpha < 0 \end{cases}$ <u>esercizio</u>