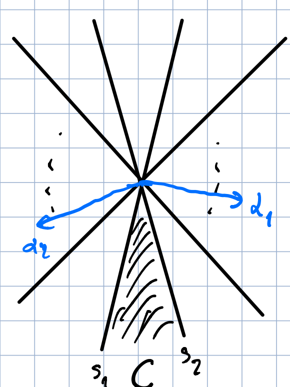
G agisce su M. Dominio fondamentale: $D \subset M$ t.c. ogni orbita $G.x$, $x \in M$, interseca D in esattamente 1 punto.

$\Delta \subset \Pi$, $\alpha \in \Pi$, H_α iperpiano di riflessione di s_α.

$H_\alpha^+ = \{ v \in V \mid (v, \alpha) > 0 \}$, $H_\alpha^- = - H_\alpha$

$\mathcal{A} = \{ H_\alpha,\ \alpha \in \Pi \}$.

$$C = \bigcap_{\alpha \in \Delta} H_\alpha^+ \quad , D = \bar{C}$$



Teorema

1) D è un dominio fondamentale per W
2) Se $v \in V$

$$\mathrm{Stab}(v) = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Pi,\ H_\alpha \ni v \rangle$$

In generale, se $U \subset V$ sottoinsieme,

$$\mathrm{Stab}(U) = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Pi,\ U \subset H_\alpha \rangle$$

Prima dimostriamo che $\forall v \in V$ è coniugato a qualche $v' \in D$.

Sia $K = \mathrm{Span}_+ \{ \alpha,\ \alpha \in \Delta \}$ = comb. lin a coeff ≥ 0 delle $\alpha \in \Delta$.

$v \leq w \iff w - v \in K$. Nell'orbita $W.v$ scegliamo un elemento massimale $v' \geq v$. Se $\alpha \in \Delta$

$$s_\alpha(v') = v' - 2\frac{(v',\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \quad \in W.v \qquad \text{e}$$

$$s_\alpha(v') - v' = -\frac{2(v',\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \quad \text{non può} \in K \text{, altrimenti } s_\alpha(v') \geq v'$$

quindi $(v',\alpha) \geq 0$. Questo deve valere $\forall \alpha \in \Delta \Rightarrow v' \in D$.

Ora bisogna dimostrare che se $v, v' \in D$, $v \neq v'$, allora v e v' non sono coniugati.

Sia $w \in W$ t.c.

$$w(v) = v' \quad , \quad v, v' \in D .$$

$\forall \alpha \in \Delta$

$$0 \leq (v,\alpha) = (w(v), w(\alpha)) = (v', w(\alpha))$$

$w(\alpha) = \sum_{\beta \in \Delta} c_\beta \beta$. Se $(v,\alpha) > 0 \Rightarrow$

$w(\alpha) > 0$ perché $v' \in D$ quindi $(v',\beta) \geq 0 \Rightarrow$ se fosse $w(\alpha) < 0$
$(c_\beta \leq 0)$ $(w(\alpha), v') \leq 0$

Quindi intanto se $v \in C \Rightarrow w = id$ $\Big(w(\alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta$
$\Rightarrow w(\alpha) > 0$, $\forall \alpha \in \Pi \Rightarrow w = id \Big)$

Sia $(v,\alpha) = 0$ per $\alpha \in \Lambda \subset \Delta$, $(v,\alpha) > 0$, $\alpha \in \Delta \setminus \Lambda$.
Allora $s_\alpha(v) = v$, $\alpha \in \Lambda$.
Sia w di lunghezza minima t.c. $w(v) = v'$. Allora
$w s_\alpha(v) = v' \Rightarrow l(w s_\alpha) > l(w)$ se $\alpha \in \Lambda$

$\Rightarrow w(\alpha) > 0$ se $\alpha \in \Lambda$. Se $\alpha \in \Delta \setminus \Lambda$ $w(\alpha) > 0$, visto,
quindi $w(\alpha) > 0$ $\forall \alpha \in \Delta \Rightarrow w = id$.

2) Già visto $v \in C \Rightarrow \mathrm{Stab}(v) = 1$
$v \in D$, $(\alpha, v) = 0$ $\alpha \in \Lambda \subset \Delta$, $(\alpha, v) > 0$, $\alpha \in \Delta \setminus \Lambda$.

Sia $\beta \in \Pi \setminus \mathrm{Span}\,\Lambda$. $(\beta, v) > 0$ $\left(\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha\right.$, un c_α
con $\alpha \in \Delta \setminus \Lambda$ è $\left.> 0\right)$ quindi se $w(v) = v \Rightarrow$

$$(w(\beta), w(v)) = (w(\beta), v) > 0 \Rightarrow w(\beta) > 0$$

Quindi può essere $w(\beta) < 0$ solo per le $\beta \in (\mathrm{Span}\,\Lambda) \cap \Pi$.
Allora, se $T = \{ s_\alpha, \alpha \in \Lambda \}$, si ha $w \in W_T$
(se $\alpha_1 \in \Lambda$ è t.c. $w(\alpha_1) < 0$, $w s_{\alpha_1}$ manda in $-\Pi$ le stesse radici di W meno α_1; $w s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \cdots$, ecc. alla fine $w s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_k}$ manda tutte le radici positive in radici positive $\Rightarrow = id$).

Se $v \in V$ qualunque, $\exists\, w$ t.c. $v' = w(v) \in D$ e
$\mathrm{Stab}(v') = W_T$ $T = \{ s_\alpha, \alpha \in \Lambda \}$. Allora

$$\mathrm{Stab}(v) = w\, \mathrm{Stab}(v')\, w^{-1} = w\, W_T\, w^{-1} =$$

$$\langle w s_\alpha w^{-1} = s_{w(\alpha)} \mid \alpha \in \Lambda \rangle$$ = gruppo generato dalle riflessioni rispetto agli $H_\beta \ni v$.

Se $U \subset V$ è un sottoinsieme qualunque,

$$\mathrm{Stab}(U) = \bigcap_{v \in U} \mathrm{Stab}(v) = \mathrm{Stab}(\mathrm{Span}\, U) =$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Stab}(v_i) \qquad v_1, \dots, v_n \text{ base di Span } U$$

$$= \underbrace{\mathrm{Stab}\, v_1}_{\text{gruppo } W_{T_1}} \cap \left[\underbrace{\bigcap_{i=2}^{n} \mathrm{Stab}(v_i)}_{} \right]$$

per induzione su n è il sottogruppo di W_{T_1} generato dalle riflessioni rispetto a iperpiani (che contengono v_1) che contengono $v_2, \dots, v_n$.

$\square$

Φ $\quad W$ gr. gen. delle rifl. s_α, $\alpha \in \Phi$, potrebbero esserci in W altre riflessioni oltre alle s_α.

<u>Coroll</u> Le uniche riflessioni di W sono le s_α, $\alpha \in \Phi$. ($\alpha \in \Pi$).

<u>dim.</u> Se s è una riflessione in W, H è il suo iperpiano di riflessione, $\mathrm{Stab}(H) = \langle s_\beta \mid H_\beta \supset H,\ \beta \in \Phi \rangle$

$\Longleftrightarrow \exists \beta : H_\beta = H$ e $s_\beta = s$.

$\blacksquare$

<u>oss.</u>

1) La $C = \{ (v, \alpha) > 0,\ \alpha \in \Delta \}$ è una componente connessa di $M_W = V \setminus \bigcup_{\alpha \in \Pi} H_\alpha$

Infatti, $v \in C \Rightarrow \mathrm{Stab}(v) = 1 \Rightarrow$ nessun $H_\alpha \ni v$.

Le componenti connesse di M_W si dicono CAMERE

I MURI di C sono gli iperpiani $\{(v,\alpha)=0\}=H_\alpha, \alpha\in\Delta$

Possiamo dire che W è generato dalle riflessioni rispetto ai muri della camera C, relativa a un sistema Δ.

2) L'azione di W è semplicemente transitiva sulle camere.
Se C' un'altra camera, sia $P'\in C'$. Poiché $\bar{C}=D$ è un dominio fondamentale e W permuta le radici e quindi permuta gli iperpiani di riflessione, quell'unico $w\in W$ t.c. $w(P)=P'$, $P\in C$, è t.c. $w(C)=C'$.

Prop. Si ha una corrispondenza biunivoca tra

$$\{\text{sistemi semplici } \Delta\subset\Phi\} \longleftrightarrow \{\text{camere } C \text{ di } M_\Phi\}$$
$$\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\} \longleftrightarrow \{v\in V \mid (\alpha_i,v)>0,\ i=1,\dots,n\}$$

dim. Δ sistema semplice e C la camera associata.
Suppongo che W agisca in maniera sempl. trans. sia sui sist. semplici che sulle camere: al sistema semplice

$$w(\Delta)=\{w(\alpha_1),\dots,w(\alpha_n)\} \quad \text{sarà associata la camera}$$
$$w(C)=\{v\in V \mid (v,w(\alpha_i))>0,\quad i=1,\dots,n\}$$

$$S=\{s_\alpha \mid \alpha\in\Delta\} \qquad T\subset S \qquad W_T$$

$$T\cup T' \longrightarrow W_{T\cup T'} = \text{gruppo generato da } W_T, W_{T'}.$$

$$T\cap T' \longrightarrow W_{T\cap T'} = W_T\cap W_{T'}$$

$$w=s_1\cdots s_q = s_1'\cdots s_q' \qquad s_i\in W_T,\quad s_j'\in W_{T'}$$

Ieri: visto che se $w = s_1 \cdots s_q \in W_T$ e $s_1 \cdots s_q$ è espressione ridotta $\Rightarrow s_i \in T$. Applicando sia a T che a T' si deduce che $s_i \in T \cap T'$.

S come sopra, $T \subset S$ che corrisponde a $\Delta_T \subset \Delta$. $(T = \{s_\alpha, \alpha \in \Delta_T\})$

D è "stratificato" nel modo seguente.

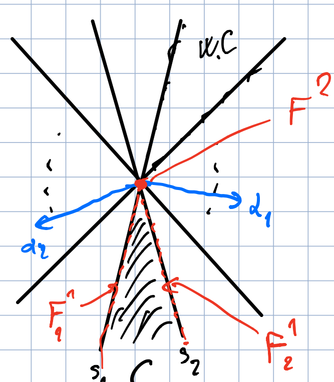
$$C_T = \{ v \in D \mid (v, \alpha) = 0, \alpha \in \Delta_T, (v, \alpha) > 0 \ \alpha \in \Delta \setminus \Delta_T \}$$

$$\operatorname{codim}(\operatorname{Span} C_T) = \# \Delta_T = \# T$$

Si ha: $\bigcup_{T \subset S} C_T = \bar{C} = D \qquad C_T \cap C_{T'} = \emptyset$

$C_\emptyset = C, \quad C_S = \{0\}$

Quindi $\{C_T\}_{T \subset S}$ dà una partizione di D in convessi relativamente aperti.



$C, \ F_1^1, \ F_2^1, \ F^2$

$w C_T$, $T \subset S$, $w \in W$, dà una partizione della chiusura della camera $w.\overline{C}$

$w C_T = C_{T'} \iff T = T'$ e $w \in W_T = \mathrm{Stab}\, C_T$;

$w C_T = w' C_{T'} \iff T = T'$ e $w' \in w W_T$

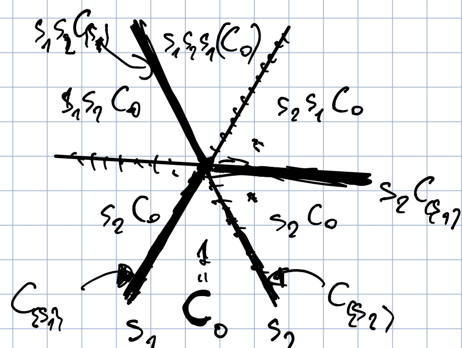
L'unione degli strati $\{w C_T,\ w \in W,\ T \subset S\} = \mathcal{C}$

(complesso di Coxeter)

ogni strato corrisponde a una e una sola classe laterale $w W_T$ (per un certo T).

strati di tipo T: C_T $\{w.C_T\} \leftrightarrow w W_T$

$\mathfrak{S}_3$
$\shortparallel$
D_3



Cam = {camere}
si può identificare
$W \leftrightarrow$ Cam
$w \leftrightarrow w C_0$

$S = \{s_1, s_2\}$ $T = \{s_1\}$ $W_{\{s_1\}}$ W^T = elementi di lunghezza minima nelle classi laterali di W_T

$W^T = \{1, s_2, s_1 s_2\}$

Date due camere C', C'', sia $\qquad Q = \{H_\alpha, \alpha \in \Pi\}$

$\mathcal{M}(C', C'') = \{ H \in \mathcal{Q} \mid H$ separa C' da $C'' \}$

$w \in W$

$$\mathcal{M}(w) = \{ H \in \mathcal{Q} \mid H \text{ separa } C_0 \text{ da } w.C_0 \}$$

C_0 camera "base".

oss. $H \in \mathcal{M}(w) \iff w^{-1}(H) \in \mathcal{M}(w^{-1})$ quindi

$$w^{-1}\mathcal{M}(w) = \mathcal{M}(w^{-1}) \qquad \Rightarrow \# \mathcal{M}(w) = \# \mathcal{M}(w^{-1})$$

def. 1) Due camere C, C' si dicono adiacenti se $\operatorname{codim}(\operatorname{Span}(\bar{C} \cap \bar{C}')) = 1 \iff \bar{C} \cap \bar{C}'$ è contenuta in un unico iperpiano $H \in \mathcal{Q} \iff \# \mathcal{M}(C, C') = 1$

oss. le camere adiacenti a C_0 sono tutte e sole le $s_\alpha(C_0)$, $s_\alpha \in S$ $(\alpha \in \Delta)$.

C_0 e $s_\alpha(C_0)$ sono separate dal solo H_α.

le camere adiacenti a $w(C_0)$ sono le $w s_\alpha(C_0)$, $\alpha \in \Delta$, $\mathcal{M}(w(C_0), w s_\alpha(C_0)) = w(H_\alpha)$.

2) Una galleria è una successione

$$\Gamma = (C_1, \dots, C_k)$$

di camere t.c. C_i e C_{i+1} sono adiacenti.

Si dirà che Γ attraversa un iperpiano $H \in \mathcal{Q}$ se $H \in \mathcal{M}(C_i, C_{i+1})$ per qualche i.

$$\mathcal{M}(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{M}(C_i, C_{i+1}).$$