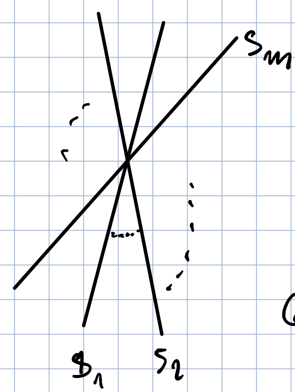
D_m diedrale ha m rotazioni $\frac{2\pi}{m}k$, e m simmetrie



Prop $D_m = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = 1, (s_1 s_2)^m = 1 \rangle$

dim s_1, s_2 generano e le relazioni valgono.

$$G = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = 1, (s_1 s_2)^m = 1 \rangle \xrightarrow[\text{suriettivo}]{} D_m$$

$$s_i \to s_i$$

m è la minima potenza k t.c.

$(s_1 s_2)^k = 1$ in D_m $\Rightarrow$ anche in G

$$s_1,\ s_1 s_2,\ s_1 s_2 s_1,\ s_1 s_2 s_1 s_2,\ \dots,\ (s_1 s_2)^{m-1} s_1$$
$$s_2,\ s_2 s_1,\ s_2 s_1 s_2,\ s_2 s_1 s_2 s_1,\ \dots,\ (s_2 s_1)^{m-1} s_2$$

questi elementi sono tutti diversi in D_m (esercizio) e quindi anche in G.

$P(s_1, s_2) = 1$, P nelle lettere dei generatori, è un succ. alternato di s_1 e s_2 e quindi si trovano solo quelle scritte $G \cong D_m$. $\square$

oss le relazioni si riscrivono $s_i^2 = 1$, $\underbrace{s_1 s_2 s_1 s_2 \cdots}_{m \text{ fattori}} = \underbrace{s_2 s_1 s_2 s_1 \cdots}_{m \text{ fattori}}$

W gen. da rifl. risp. alle riflessioni s_α, $\alpha \in \Delta$.

$m(\alpha, \beta) = o(s_\alpha s_\beta)$, $\alpha, \beta \in \Delta$

oss. $\Phi \cap \operatorname{Span}\{\alpha, \beta\} := \Phi_{\alpha\beta}$ è un sistema di radici di rango 2 che ha $\{\alpha, \beta\}$ come sistema semplice. Infatti, le 2 condizioni sono ovviamente verificate. $\{\alpha,\beta\}$ semplice deriva dalla def. di sistema semplice.

Quindi s_α, s_β generano un $D_{m} \subset W$ $\qquad m = m(\alpha,\beta)$

<u>Teorema</u> W ha una presentazione

$$W = \langle s_\alpha,\ \alpha\in\Delta \mid (s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1,\quad m(\alpha,\alpha)=1,\quad m(\alpha,\beta)\geq 2,\ \alpha\neq\beta \rangle$$

S un insieme, $m(s,s')\in \mathbb{Z}_{\geq 1}\cup\{\infty\}$, $\forall s,s'\in S$, con $m(s,s)=1$, $m(s,s')=m(s',s)\geq 2$ se $s\neq s'$. Allora la coppia (W,S) con

$$W = \langle s\in S \mid (ss')^{m(s,s')} = 1\rangle$$

(nessuna relazione se $m(s,s')=\infty$) si dice sistema di Coxeter

(in generale W sarà infinito)

W generato da un insieme S, t.c. $m(s,s') = o(ss')$ per cui vale la <u>condizione di scambio</u> ($\ell(ws)<\ell(w) \Rightarrow w = s_1\cdots s_q = s_1\cdots\hat{s}_j\cdots s_q s$)

$\Rightarrow$ W è di Coxeter.

$$G = \langle s\in S \mid (ss')^{m(s,s')} = 1\rangle.$$

$$f: S \longrightarrow G \qquad f(s)=s. \qquad (f(s)f(s'))^{m(s,s')} = 1$$

$w \in W$, $w = s_1 \cdots s_q$ decomposizione ridotta.

Vogliamo dimostrare che $g(w) = f(s_1) f(s_2) \cdots f(s_q)$ è ben definita (cioè non dipende dalla decomposizione ridotta di w), ed è un omomorfismo. Questo dim. il teo. in quanto $h: G \to W$, $h(s) = s$, è un omomorfismo, che è inversa di g.

$w \in W$, consideriamo l'insieme di tutte le sue decomposizioni ridotte

$$D_w = \{ (s_1, \dots, s_q) \mid s_i \in S, \quad w = s_1 \cdots s_q \text{ ridotta} \}$$

$(q = \ell(w))$

Vogliamo dimostrare che $F_w : D_w \to G$

$$F_w(s_1, \dots, s_q) = f(s_1) \cdots f(s_q) \quad \text{è costante.}$$

Per induzione su $q = \ell(w)$. Se $q = 0, 1$ ovvio.

Supponiamo $q \geq 2$.

$$\underline{s} = (s_1, \dots, s_q) \qquad \underline{s}' = (s'_1, \dots, s'_q) \quad \in D_w$$

Nel caso

(a) $s_1 = s'_1$ oppure $s_q = s'_q$ $\qquad \cancel{s_1} s_2 \cdots s_q = \cancel{s_1} s'_2 \cdots s'_q = w'$ per induzione si conclude

· Nel caso

(b) $\exists\, s, s' \in S$ t.c. $s_j = s'_k = s$, $s_k = s'_j = s'$ per j dispari, k pari.

allora

$$w = s s' s s' \cdots = s' s s' s \cdots$$

questa relazione è conseguenza di quella $(ss')^m = 1$, quindi vale

$$f(s) f(s') \cdots = f(s') f(s) \cdots.$$

$\underline{s}_0 = (s'_1, s'_2, \dots, s'_q)$

$\underline{s}_1 = (s_1, s_2, \dots, s_q)$

$\underline{s}_2 = (s_2, \dots, s_q, s'_q)$

$\underline{s}_3 = (s_3, s_4, \dots, s_q, s'_q, s_q)$

$\vdots$

$\underline{s}_{q-1} = (s_{q-1}, s_q, s'_q, s_q, \dots, \ )^{s_q \circ s'_q}$

$\underline{s}_q = (s_q, s'_q, s_q, \dots, \ )^{s'_q \circ s_q}$

$\underline{s}_{q+1} = (s'_q, s_q, s'_q, \dots, \ )^{s_q \circ s'_q}$

Se $\underline{s}_i, \underline{s}_{i+1} \in D_w$, $F_w(\underline{s}_i) \neq F_w(\underline{s}_{i+1}) \Rightarrow$
$\underline{s}_{i+2} \in D_w$ e $F_w(\underline{s}_{i+2}) \neq F_w(\underline{s}_{i+1})$

$w = s'_1 \cdots s'_q = s_1 \cdots s_q \Rightarrow \ell(w s'_q) < \ell(w) \overset{\text{scambio}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow w = s_1 \cdots \hat{s}_j \cdots s_q s'_q \qquad \underline{u} = (s_1, \dots, \hat{s}_j, \dots, s_q, s'_q)$

$\underline{u}$ finisce per s'_q come $\underline{s}_0 \Rightarrow$ per (e) $F_w(\underline{u}) = F_w(\underline{s}_0)$. Se fosse $j > 1$ $\underline{u}$ inizierebbe per s_1 come $\underline{s}_1$ e quindi ancora per (e) $F_w(\underline{u}) = F_w(\underline{s}_1)$, ma allora $F_w(\underline{s}_0) = F_w(\underline{s}_1)$. Quindi $j = 1$, cioè $\underline{u} = \underline{s}_2$.

Quindi proseguendo, se $F_w(\underline{s}_0) \neq F_w(\underline{s}_1)$, si concluderebbe $\underline{s}_q, \underline{s}_{q+1} \in D_w$, $F_w(\underline{s}_q) \neq F_w(\underline{s}_{q+1})$, contro il caso (b).

Quindi $F_w(\Sigma_0) = F_w(\Sigma_1)$.

Segue che $g(w) = f(s_1) \cdots f(s_q)$ è ben definita.
Resta da dimostrare che è omomorfismo.
Resta dim. che $g(ws) = g(w) f(s) \quad \forall s \in S$

Se $\ell(ws) > \ell(w)$ $\quad w = s_1 \cdots s_q$ ridotta $\Rightarrow ws =$
$= s_1 \cdots s_q s$ ridotta $\Rightarrow$
$g(ws) = f(s_1) \cdots f(s_q) f(s) = g(w) f(s)$

Se $\ell(ws) < \ell(w)$ $\quad ws = w'$, $\ell(w') = \ell(w) - 1$
$w = w's$
$\Rightarrow \quad g(w's) = g(w) = g(w') f(s)$

ma $f(s)^2 = 1$ segue $g(w') = g(ws) = g(w) f(s)$

W, Δ semplice $\quad S = \{ s_\alpha, \alpha \in \Delta \}$

si dice <u>sottogruppo parabolico</u> il sottogruppo generato dalle riflessioni in un $T \subset S$: W_T $\quad T = \{ s_\alpha, \alpha \in \Delta_T \subset \Delta \}$

$\Phi_T = \Phi \cap (\mathrm{Span}\, \Delta_T = V_T)$

<u>Prop.</u> (i) Φ_T è un sistema di radici (sia in V che in V_T) con gruppo di riflessioni W_T e sistema semplice Δ_T.

(ii) La funzione lunghezza ℓ_T di W_T relativa a T (a Δ_T)

coincide con l su W_T (cioè se $w \in W_T$, $l(w) = q$ in W, esiste una decomposizione ridotta $w = s_1 \cdots s_q$ con $s_i \in T$.
In realtà, $\forall$ decomposizione ridotta $w = s_1 \cdots s_q$, $w \in W_T$, si ha $s_i \in T$)

(iii) Sia $W^T = \{ w \in W \mid l(ws) > l(w), s \in T \}$. Allora si ha decomposizione $W = \coprod_{u \in W^T} u W_T$ in classi laterali a due a due distinte.
Ogni $u \in W^T$ è l'unico elemento di lunghezza minima in $u W_T$. Se $w \in u W_T$, allora $w = uv$, $v \in W_T$, $l(w) = l(u) + l(v)$

---

def Gli elementi di W^T si dicono rappresentanti di lunghezza minima delle classi laterali di W_T

(i) Le condizioni (1) e (2) che definiscono un sistema di radici sono soddisfatte (su V in V_T). Δ semplice $\Rightarrow$ Δ_T è semplice
$\alpha \in \Phi_T$, α è comb. di elem. di Δ_T a coeff. tutti dello stesso segno.

(ii) $l(w) = n(w)$. $\alpha \in \Phi_+ \setminus \Phi_T$, $\alpha = \sum_{\alpha_i \in \Delta} x_i \alpha_i$, $x_i \geq 0$

qualche x_i relativo a un $\alpha_i \in \Delta \setminus \Delta_T$ deve essere $\neq 0$.
Quindi

$s_\beta(\alpha)$, $\beta \in \Delta_T$, $= \alpha - 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}\beta$ ha ancora coeff > 0

in α_i. Quindi se $w \in W_T$, $w(\alpha) > 0$.

Allora $n(w) = n_T(w)$, $w \in W_T$ (n_T = n calcolato da W_T)

Se $\exists\, w \in W_T$, $l(w) = q$, $w = s_1 \cdots s_q$, $s_i \in T$,
$= s'_1 \cdots s'_q$ con qualche $s'_i \notin T$. Prendiamo q minimo possibile. Allora $s'_1, s'_q \notin T$ ($s'_q \in T$ $ws'_q = s'_1 \cdots s'_{q-1}$ sarebbe più corto con qualche $s'_i \notin T$)

$$l(ws'_q) < l(w) \Rightarrow w(\alpha'_q) < 0 \,, \quad \alpha'_q \in \Delta \setminus \Delta_T .$$

contraddice $w \in W_T$ può rendere di radice negativa solo Φ_T

iii) $w \in W$, $u \in wW_T$ di lunghezza minima.

Se $s \in T$, $l(us) > l(u)$. ($u \in W^T$)

Scriviamo

$w = uv$, $v \in W_T$, $u = s'_1 \cdots s'_k$,
$v = s_1 \cdots s_q$, $s_i \in T$
$k = l(u)$, $q = l(v)$

$w = s'_1 \cdots s'_k s_1 \cdots s_q$. Se fosse $l(w) < l(u) + l(v)$ per le cond. di cancellazione, w si otterrebbe cancellando 2 lettere. Se entrambi fossero degli s, l'espressione di v non sarebbe ridotta. Uno dovrebbe essere un s'; ma allora troverei un elemento più corto nella stessa classe laterale. $\Rightarrow l(w) = l(u) + l(v)$.

$$a_n = \# \{ w \in W \mid l(w) = n \}$$

$$W(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n = \sum_{w\in W} t^{\ell(w)}$$ (Polinomio di Poincaré di W)

Si può scrivere un'analoga espressione per sottogruppi di W e anzi per qualunque sottoinsieme $X \subset W$:

$$X(t) = \sum_{w\in X} t^{\ell(w)}$$

<u>esempio</u>

$W = \sigma_2 = \{1, s\}$ $\qquad W(t) = 1+t$

$\sigma_3 = \{1, s_1, s_2, s_1s_2, s_2s_1, s_1s_2s_1 (= s_2s_1s_2)\}$

$W(t) = 1+2t+2t^2+t^3$

<u>oss</u> $W(t)$ è monico (perché $\exists$ un unico elemento di lunghezza massima w_0, $\ell(w_0) = \#\Pi$) di grado $\#\Pi$.

<u>Prop.</u> $W(t) = W^T(t)\, W_T(t)$

<u>dim</u> dimostrare subito da $w = uv$ $\quad u\in W^T, v\in W_T$, $\ell(w) = \ell(u)+\ell(v)$

$W = \sigma_3$ $\quad T = \{s_1\} \subset S = \{s_1, s_2\}$ $\qquad W_T(t) = 1+t$

$W(t) = (1+t)(1+t+t^2)$ $\qquad W^T(t) = 1+t+t^2$

$W_T = \{1, s_1\}$ $\qquad W^T = \{1, s_2, s_1s_2\}$

$W = \sigma_4$? $\quad W(t)$ divisibile per $1+t = W_{\{s_1\}}(t)$, $\quad W_{\{s_1,s_2\}}(t) =$
$= (1+t)(1+t+t^2)$

esercizio: $W(t) = (1+t)(1+t+t^2)(1+t+t^2+t^3)$

esercizio: $W = \sigma_n$ $\qquad W(t) = \prod_{k=1}^{n-1} (1+t+\dots+t^k)$

Prop. $$\sum_{T\subset S} (-1)^{|T|} \frac{W(t)}{W_T(t)} = \sum_{T\subset S} (-1)^{|T|} W^T(t) = t^N$$

$N = \ell(w_0) = \#\Pi$

dim. w sta in qualche W^T; precisamente, se

$$S_w = \{ s\in S \mid \ell(ws) > \ell(w) \}$$

$$w \in W^T \iff T \subset S_w$$

$t^{\ell(w)}$ appare $\forall\, T \subset S_w$, producendo un coefficiente:

$$\sum_{T\subset S_w} (-1)^{|T|} = \begin{cases} \overset{\text{esercizio}}{0} & \text{se } S_w \neq \emptyset \\ 1 & \text{se } S_w = \emptyset \text{ cioè } w = w_0 \end{cases}$$
