Deletion condition and Exchange condition.

<u>Or</u> $\quad l(ww') \leq l(w)+l(w') \quad \forall w, w' \in W \quad$ quindi

$l(ws_\alpha) \leq l(w)+1$

Si è visto:

$$n(ws_\alpha) = \begin{cases} n(w)+1 & \text{se } w.\alpha > 0 \\ n(w)-1 & \text{se } w.\alpha < 0 \end{cases}$$

Sia $\quad w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n} \quad$ un'espressione per w.

Sia $\quad w_k = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_k} \quad (w_r = w)$. $\quad$ Allora:

$n(w_{k+1}) \leq n(w_k)+1$. $\quad$ Quindi, se $\quad n(w) < r$, deve esistere un primo indice j t.c. $n(w_j) = n(w_{j-1})-1 < n(w_{j-1})$, cioè t.c. $\quad w_{j-1}(\alpha_j) = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{j-1}}(\alpha_j) < 0$.

Sia i il più grande indice $(\leq j-1)$ t.c.

$$s_{\alpha_i} s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{j-1}}(\alpha_j) < 0 \quad , \quad s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{j-1}}(\alpha_j) > 0$$

$(\alpha_j > 0)$. $\quad$ Per il lemma visto la volta scorsa applicato a s_{α_i} e alla radice >0 $\quad \alpha'_j = s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{j-1}}(\alpha_j) \quad$ si deduce $\alpha'_j = \alpha_i$, cioè $\quad s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{j-1}}(\alpha_j) = \alpha_i$.

Quindi, se $\quad w' = s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{j-1}}$, $\quad w'(\alpha_j) = \alpha_i \quad \Rightarrow$

$$s_{\alpha_i} = w' s_{\alpha_j} (w')^{-1} \quad \Rightarrow \quad s_{\alpha_i} w' = w' s_{\alpha_j}$$

cioè:

$$s_{\alpha_i} s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{j-1}} = s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{j-1}} s_{\alpha_j}$$

$\Rightarrow$

$$s_{\alpha_i} s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{j-1}} s_{\alpha_j} = s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{j-1}}$$

questo implica la CONDITION:

Se $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$ t.c. $n(w) < r$: $\exists$ 2 indici i, j
t.c. $w = s_{\alpha_1} \cdots \hat{s}_{\alpha_i} \cdots \hat{s}_{\alpha_j} \cdots s_{\alpha_r}$. (*)

Ne segue:

Prop $n(w) = \ell(w)$

Infatti: $n(w) \leq \ell(w)$ visto. Se fosse $n(w) < \ell(w)$ sia $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$ ridotta $(r = \ell(w))$ si potrebbe scrivere w con 2 generatori di meno, contro $r = \ell(w)$.

La condizione (*) si traduce quindi nella CONDIZIONE DI CANCELLAZIONE:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Se } w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r} \text{ non è ridotta } (r < \ell(w)) \Rightarrow \exists \text{ 2 indici } i, j \\ \text{t.c. } w = s_{\alpha_1} \cdots \hat{s}_{\alpha_i} \cdots \hat{s}_{\alpha_j} \cdots s_{\alpha_r} . \end{array}}$$

Esercizio: $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$ qualunque espressione di w nei generatori s_{α_i}, $\alpha_i \in \Delta$. Allora $r \equiv \ell(w) \pmod 2$

Data l'espressione ridotta $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$ $(r = \ell(w))$ per il corollario devono esistere r radici positive $\in \Pi$ che vengono mandate da w in radici < 0.

Se $\alpha > 0$ è t.c. $w(\alpha) < 0$, sia i il più grande indice t.c. $s_{\alpha_i} s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_n}(\alpha) < 0$, $s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_n}(\alpha) > 0$

Allora (come prima) deve essere:

$$s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_n}(\alpha) = \alpha_i \iff \alpha = s_{\alpha_n} \cdots s_{\alpha_{i+1}}(\alpha_i)$$

Quindi le n radici

$$\alpha_n,\ s_{\alpha_n}(\alpha_{n-1}),\ s_{\alpha_n} s_{\alpha_{n-1}}(\alpha_{n-2}),\ \ldots,\ s_{\alpha_n} \cdots s_{\alpha_2}(\alpha_1)$$

sono proprio le radici > 0 che vengono mandate in radici < 0.

NOTA: w ha un'espressione ridotta che finisce con $s_{\alpha_n} \Rightarrow w(\alpha_n) < 0$

Vogliamo vedere il viceversa.

CONDIZIONE DI SCAMBIO

$w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n}$ espressione ridotta. Se $l(w s_\alpha) < l(w)$ $(\alpha \in \Delta) \Rightarrow \exists$ indice i t.c.

$$w s_\alpha = s_{\alpha_1} \cdots \hat{s}_{\alpha_i} \cdots s_{\alpha_n}$$

$$\left(\text{quindi} \quad w = s_{\alpha_1} \cdots \hat{s}_{\alpha_i} \cdots s_{\alpha_n} s_\alpha \right)$$

In particolare, w ha un'espressione ridotta che finisce in $s_\alpha \iff l(w s_\alpha) < l(w)$.

dim $\quad l(w s_\alpha) < l(w) \iff l(s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n} s_\alpha) < n \Rightarrow$

$s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n} s_\alpha$ non è ridotta $\Rightarrow$

$$s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n} s_\alpha = s_{\alpha_1} \cdots \hat{s}_{\alpha_i} \cdots \hat{s}_{\alpha_j} \cdots s_{\alpha_n} s_\alpha$$

Non può essere $j \leq n$ altrimenti, cancellando s_α, la espressione per w non sarebbe ridotta. Segue di dover cancellare s_α $\Rightarrow$

$$w s_\alpha = s_{\alpha_1} \cdots \hat{s}_{\alpha_i} \cdots s_{\alpha_n} \qquad (*)$$

L'ultima osservazione: $\Rightarrow$ ovvio

$\Leftarrow$ visto.

Quindi abbiamo anche il viceversa di quello di prima:

$w(\alpha) < 0 \quad \Rightarrow \quad n(w s_\alpha) = \ell(w s_\alpha) = n(w) - 1 = \ell(w) - 1$

e si applica la condizione di scambio ottenendo che w finisce per s_α.

Abbiamo visto che W agisce transitivamente sui sistemi positivi (e su quelli semplici). In realtà l'azione è semplicemente transitiva.

Infatti: sia Δ semplice e $\Pi \supset \Delta$ sistema positivo.

se $\quad w(\Pi) = \Pi \iff n(w) = 0 \iff \ell(w) = 0 \iff w = 1$

$\Updownarrow$

$w(\Delta) = \Delta$

Sia $-\Pi$ l'opposto di Π, che è sistema positivo (con sistema semplice associato $-\Delta$). Allora per la semplice transitività $\exists$ unico $w_0 \in W$ che manda Π in $-\Pi$, e

$\ell(w_0) = n(w_0) = \#\Pi$

w_0 è l'unico elemento che finisce per ogni $s_\alpha \in \Delta$ (perché $\ell(w_0 s_\alpha) < \ell(w_0)$ $\forall \alpha$).

$w_0 = w_0^{-1}$ perché $\ell(w_0^{-1}) = \ell(w_0)$. ($\Rightarrow w_0^2 = 1$)

Inoltre ogni $w \in W$ è un fattore (a sinistra e a destra) di w_0:
si moltiplichi a destra w per generatori s_α aumentando la lunghezza, finché non si arriva alla massima lunghezza: quindi si trova w_0.

Esercizio. $W = \mathfrak{S}_{n+1}$ $\quad \Delta = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \quad i = 1, \dots, n$

$\Pi = \varepsilon_i - \varepsilon_j \quad 1 \le i < j \le n$
