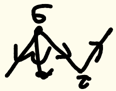
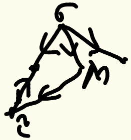
Notes on Discrete Morse Theory (2)

Riprendiamo la dim. di 2 in modo più costruttivo.

Si fa sequenza di passaggi dove ad ogni passo si prendono tutti i min $\leq_M$ che non sono critici e si collassano secondo M. I collassamenti riguardano coppie di celle diverse. Il nuovo poset si ottiene cancellando le coppie collassate τ^{p-1}, σ^p, tutti i lati che escono da τ e quelli che escono da σ: infatti σ non può essere faccia di un λ^{p+1} altrimenti avrei un'altra $\mu^p > \tau^{p-1}$. Al passo successivo posso ancora avere celle minimali non critiche, e faccio lo stesso. Vado avanti finché non trovo tutte celle minimali critiche. "Stacco" le celle critiche e procedo. Si noti che le celle del bordo di ognuna di queste celle critiche non sono state contratte in precedenza:  : no perché $\sigma \leq_M \tau$,  : no, anche in questo caso $\sigma \leq_M \tau$ perché $\exists\ \sigma > \mu > \tau$.

Siano $K = K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_t$ (*) la successione di complessi che si ottiene e siano $K_{i_0} \supset K_{i_1} \supset \cdots \supset K_{i_s}$ $(= K_t)$ quelli corrispondenti a minimi f_i che siano celle critiche. Quindi $K_{i_j+1} = K_{i_j} \setminus \{\sigma_{(j),\alpha_1}, \dots, \sigma_{(j),\alpha_{k_j}}\}$ con le σ critiche. (possono essere di dimensione diversa). Sia h_j la contrazione che $K_{i_j+1} \searrow K_{i_{j+1}}$ (potrebbe essere l'identità se $i_j+1 = i_{j+1}$). Sia anche $\tilde{h}_j : K_{i_j} \longrightarrow K_{i_{j+1}}$ la mappa che estende h_j a $\sigma_{(j),\alpha}$ tramite l'identità e passaggio al quoziente.

Allora K_0 si ricostruisce a partire da K_t (che è un insieme di celle di dim 0) attaccando successivamente le celle $\sigma_{(s-1)}, \sigma_{(s-2)}, \dots$ $(\{\sigma_{(s)}\} = K_t)$ tramite h_{s-1}, $h'_{s-2} = \tilde{h}_{s-1} \circ h_{s-2}$, $h'_{s-3} = \tilde{h}_{s-1} \circ \tilde{h}_{s-2} \circ h_{s-3}$, e così via. Quindi possiamo pensare le celle $\tilde{\sigma}_{(j),\alpha}$ come $h'_{(j)}(\sigma_{(j),\alpha})$.

(*) K_t è un sottocomplesso 0-dimensionale, altrimenti potrei proseguire.

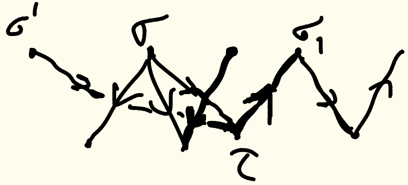
$\boxed{\text{dim formula di bordo}}$ per induzione sul # alle. Se il 1° passo è nel caso I, allora

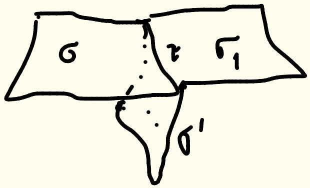
$K = K_0 \searrow K_{i_1}$ e per costruzione $K_c = (K_{i_1})_c$. Per quanto visto i cammini tra σ^p e τ^{p-1} critiche che sono in K_{i_1} sono gli stessi di K.

Sia ora, nel caso II, ~~tutti~~ i minimi σ^p per g_H siano critici. Possiamo scegliere p massimo possibile. Consideriamo tutti i cammini alternanti massimali uscenti da σ (ovvero tutti i cammini) che connettono σ con una cella critica τ^{p-1}. Ognuno di essi ha lunghezza dispari $2k+1$, $k \geq 0$. Sia $\bar{k} = \max$ di tali k.

$\bar{k} = 0$ allora tutte le facce $\tau^{p-1} < \sigma$ sono critiche, oppure dune di esse sono accoppiate con una λ^{p-2}. Queste ultime si contraggono con $h'_{(1)}$, quindi $\tilde{\sigma} = h'_{(1)}(\sigma)$ ha incidenza con le $h'_{(1)}(\tau)$, $\tau < \sigma$ critica, che è data che $[\sigma:\tau]$ in K.

Si $\bar{k} \geq 1$, $\exists\ \tau^{p-1} < \sigma$ e $\sigma_1^p > \tau$ con $(\tau, \sigma_1) \in M$.



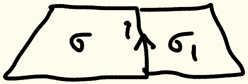


Possiamo

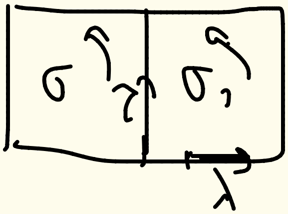
scegliere σ in modo che $\bar{k}(\sigma)$ sia massimo e un cammino con $n = \bar{k}(\sigma)$ inizi per $\sigma > \tau$. Allora $\forall\, \sigma' > \tau$ in K_{i_1} σ' è critica.

Quindi τ è minimale per $\leq_M$ in K_{i_1+1}. Quindi il passaggio a K_{i_1+2} contiene τ e un'altra σ_1^p; si vede che in K_{i_1+1} σ_1^p non può essere faccia di una λ^{p+1} (altrimenti come al solito τ sarebbe faccia di un'altra μ^p e non sarebbe minimale).

Nel passaggio $K_{i_1+1} \to K_{i_1+2}$ possiamo pensare di fare prima il collassamento τ, σ_1. Questo fa passare da K_{i_1+1} ad un complesso K', e $K_{i_1+1} \cup_\varphi \sigma$ a $h'' * K' \cup_{\rho\circ\varphi} \sigma$ dove $\rho\circ\varphi$ si ottiene cancellando $\varphi^{-1}(\tau) \subset \partial D^p = S^{p-1}$ e attaccando a $\partial \varphi^{-1}(\tau) = \varphi^{-1}(\partial\tau)$ $\varphi_1^{-1}(S^{p-1} \setminus \mathring{\tau})$. Cioè $S^{p-1} = S^{p-1} \setminus \varphi^{-1}(\tau) \coprod S^{p-1} \setminus \varphi_1^{-1}(\tau) \big/ x \in \partial\varphi^{-1}(\tau) \sim \varphi_1^{-1}\varphi(x)$ e definendo φ sul primo addendo e φ_1 sul secondo.



Allora l'incidenza di $h'(\sigma)$ con $h'(\lambda^{p-1})$ è data da quella di σ con λ (cammini di lunghezza 1) $[\sigma:\lambda]$ più quella di $h'(\sigma_1)$ con $h'(\lambda)$ moltiplicata per $-[\sigma:\tau][\tau:\sigma_1]$ (cammino $\sigma_1 \to \lambda$ a cui si aggiunge un pezzo $\sigma \searrow \tau \nearrow \sigma_1$; possiamo vedere σ_1 critico in K_{i_1+1} eliminando il lato τ, σ_1 da H; quindi si applica la formula a K_{i_1+1} per induzione)



Nuova p. cella $\tilde{\sigma} = \mathrm{int}(\overline{\sigma \cup \sigma_1})$

$$H_p(\sigma, \sigma \setminus \{x\}) \xrightarrow{\alpha} H_p(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma} \setminus \{x\})$$ isomorfismo $(x \in \sigma)$

(cioè l'orientazione di $\tilde{\sigma}$ è quella indotta da).

Sia $y \in \sigma_1$

$$\begin{tikzcd}
H_p(\sigma_1, \sigma_1 \setminus \{y\}) \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\partial_1", "\cong"'] \arrow[rrr, bend left, "\beta"] & H_p(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma} \setminus \{y\}) \arrow[r, phantom, "\cong"] & H_p(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma} \setminus \{x\}) \arrow[r, "\alpha^{-1}"] & H_p(\sigma, \sigma \setminus \{x\}) \arrow[d, "\partial"', "\cong"] \\
H_{p-1}(\partial\sigma_1, \partial\sigma_1 \setminus \{z\}) \arrow[rrr, phantom, "\cong"] & & & H_{p-1}(\partial\sigma, \partial\sigma \setminus \{z\}) \\
& H_{p-1}(\tau, \tau \setminus \{z\}) \arrow[ul, phantom, "\cong"] \arrow[urr, phantom, "\cong"] & &
\end{tikzcd}$$

$(z \in \tau)$

Complesso di Morse su chain complexes.

A anello commutativo con 1. Consideriamo un complesso di catene di A-moduli:

$$C_\bullet: \quad \to C_{n+1} \to C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to$$

Assumeremo che A sia PID (ma non che i C_n siano liberi).

È noto che ogni A-modulo D finit. generato si decompone in somma diretta di moduli ciclici:

$$D = \bigoplus_{i=1}^{k} D_i \qquad , \quad D_i \cong A.f_i$$

Definiamo la torsione di un elemento $d \in D$ come

$$\mathrm{tors}(d) = \{ a \in A \mid a.d = 0 \}$$

(che è un ideale in A, quindi della forma $\mathrm{tors}(d) = (a)$, $a \in A$).

Quindi se $\mathrm{tors}(f_i) = (a_i)$ si ha $D_i = A\cdot f_i \cong A/(a_i)$

Consideriamo A-moduli (finiti generati) D dotati di un insieme di generatori $f_1, \dots, f_k$ che decompongono D in moduli ciclici: $D = \bigoplus_{i=1}^{n} A\cdot f_i$

Sia quindi C_n dotato di tali generatori $\Omega_n = \{f_1^n, \dots, f_{k_n}^n\}$.

Si ha, $\forall\ b \in \Omega_n$:

$$\partial_n b = \sum_{a\in\Omega_{n-1}} w_\Omega(b,a)\cdot a \quad , \qquad w_\Omega(b,a) \in A.$$

con $w_\Omega(b,a)$ determinato modulo $\mathrm{tors}(a)$.

Sia $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$, con ordine parziale indotto da $a < b \Leftrightarrow w_\Omega(b,a) \neq 0$ (in $A/(\mathrm{tors}(a))$)

Def Un matching $M \subset \Omega\times\Omega$ è un matching su Ω

A c. se $(a,b) \in M$ allora: (i) $\mathrm{tors}(a) = \mathrm{tors}(b)$ e

(ii) $w_\Omega(b,a]$ è invertibile in $A/(\mathrm{tors}(a))$.

Dato M, sia $\mathrm{Crit}_n(\Omega) = \{ c \in \Omega_n : c$ non accoppiato $\}$.

<u>Def.</u> Il complesso di Morse (C^M_*, ∂^M_*) è definito come segue: $C^M_n = \bigoplus_{c \in \mathrm{Crit}_n(\Omega)} A \cdot c$

$$\partial^M_n(c) = \sum_p w(p) \cdot p_0$$

con $p = c \searrow a_1 \nearrow b_1 \searrow a_2 \nearrow b_2 \searrow \cdots \searrow a_k \nearrow b_k \searrow d$

$p_0 = d$, p cammino alternante

allora $v(p) \in A$ è determinato mod $\operatorname{tors}(d)$. Consideriamo il cammino p come composizione di omomorfismi

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\frac{A}{\operatorname{tors}(c)} \cong Ac \arrow[dr, "\mu_1"'] & & \frac{A}{\operatorname{tors}(b_1)} \cong A b_1 \arrow[dl, "\nu_1"] \arrow[dr, "\mu_2"'] & & A/\operatorname{tors}(b_2) \cong A b_2 \arrow[dl, "\nu_2"] \arrow[dr, dashed] & & \frac{A}{\operatorname{tors}(b_k)} \arrow[dl, "\nu_k"] \arrow[d, "\mu_{k+1}"] \\
& \frac{A}{\operatorname{tors}(e_1)} \cong A e_1 & & \frac{A}{\operatorname{tors}(e_2)} \cong A e_2 & & \cdot & \frac{A}{\operatorname{tors}(d)}
\end{tikzcd}
$$

Le frecce $\searrow^{\mu}$ sono indotte da ∂: $\mu_1(a c) = a \mu_1(c) =$
$= a\, w(c, e_1)$

$\mu_2(a b_1) = a \mu_2 b_1 = a\, w(b_1, e_2)$, ecc.

(ben definite perché $\mathrm{Ann}(a_1) \mid \mathrm{Ann}(c)$, $\mathrm{Ann}(a_2) \mid \mathrm{Ann}(b_1)$, ecc.).

Le frecce $\overset{\nu}{\nearrow}$ sono isomorfismi:

$$\nu_i(a\, a_i) = a\, \nu_i(a_i) = a\, w(b_i, a_i)^{-1}$$

dove l'inversa è in $A/\mathrm{Ann}(a_i) \cong A/\mathrm{Ann}(b_i)$.

Allora per def. si ha:

$$w(\beta) : c \longmapsto (-1)^k \mu_{n+1} \circ \nu_k \circ \mu_n \circ \cdots \circ \nu_1 \circ \mu_1 (c)$$

[Nel caso libero, si può scrivere:

$$w(\beta) = (-1)^k \prod_{\alpha \nearrow \beta} w(\beta, \alpha) \Big/ \prod_{\beta \searrow \alpha} w(\beta, \alpha)$$

]

Proposizione Sia A PID e D un A-modulo con generatori $f_1, \dots, f_n$ e una decomposizione in moduli ciclici

$$D = \bigoplus_{i=1}^{k} A \cdot f_i$$

dove $\mathrm{tors}(f_i) = (d_i)$ $\left(\text{e quindi } A \cdot f_i \cong A/(d_i) \right)$

Sia

$$\begin{cases} g_1 = f_1 \\ g_2 = \varepsilon f_2 + \sum_{j \geq 3} c_{j2} f_j & \varepsilon \text{ invertibile mod } \mathrm{tors}\, f_2 \\ g_i = f_i + c_{1i} f_1 & i = 3, \dots, k \end{cases}$$

un altro insieme di generatori di D, con le stesse torsioni $\mathrm{tors}(f_i) = \mathrm{tors}(g_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Allora si ha una decomposizione

$$D = \bigoplus_{i=1}^{n} A \cdot g_i$$

---

dim. È chiaro che i g_i sono generatori, quindi occorre dimostrare che

$$\sum a_i g_i = 0 \quad , \; a_i \in A, \; i = 1, \dots, n,$$

$$\Rightarrow \quad a_i \in \operatorname{tors}(g_i).$$

Sostituendo si trova

$$\left(a_1 + \sum_{i \geq 3} a_i c_{1i}\right) f_1 + \varepsilon a_2 f_2 + \sum_{i \geq 3} \left(a_i + a_2 c_{i2}\right) f_i = 0$$

che dà $a_2 \in Tors(f_2) = Tors(g_2)$.

Perciò otteniamo,

$$a_1 g_1 + \sum_{i=3}^{k} a_i g_i = 0$$ e di conseguenza:

$$\left(a_1 + \sum_{i \geq 3} a_i c_{1i}\right) f_1 + \sum_{i \geq 3} a_i f_i = 0$$

che dà $a_i \in Tors(f_i) = Tors(g_i)$, $i = 3, \dots, k$ e quindi

ci si riduce a:

$$a_1 g_1 = 0$$

che dà $a_1 \in Tors(g_1) = Tors(f_1)$.

__Teorema__ Sia C_*, ∂_* un complesso di A-moduli, con $\Omega = \bigcup \Omega_n$ generatori come prima e $\mathcal{M} \subset \Omega \times \Omega$ un matching aciclico del tipo descritto. Sia $\mathcal{C}^{\mathcal{M}}_*, \partial^{\mathcal{M}}_*$ il complesso di Morse dato sopra. Allora

$$H_*(C_*, \partial_*) \cong H_*(\mathcal{C}^{\mathcal{M}}_*, \partial^{\mathcal{M}}_*)$$

---

dim. Ordiniamo le coppie in $\mathcal{M}$:

$p_1 = (a_1, b_1)$, $p_2 = (a_2, b_2)$, $\dots$, $p_m = (a_m, b_m)$. Sia $\mathcal{M}^{(k)} = \{p_i \in \mathcal{M} : i \leq k\}$, $k = 0, \dots, m$. $[\mathcal{M}^{(0)} = \phi, \ \mathcal{M}^{(m)} = \mathcal{M}]$. Chiaramente $\mathcal{M}^{(k)}$ è aciclico.

Sia C_k l'insieme degli elementi critici per $\mathcal{M}^{(k)}$.

Facciamo modifiche successive all'insieme dei generatori Ω.

Supponiamo $\Omega_n = \{f_{n,j}\}_{j=1,\dots,s_n}$, $n \geq 0$. Al passo k-esimo otteniamo $f^{(k)}_{n,j}$ al posto di $f_{n,j}$, con le stesse valutazioni.

Sia $f^{(0)}_{n,j} = f_{n,j}$, $\forall n, j$. Assumiamo per induzione

su $k \geq 0$ di aver costruito generatori $f^{(k)}_{n,j}$, $n \geq 0$, per $\mathcal{C}_*$ t.c.

1) si ha una decomposizione in somma diretta:

$$\mathcal{C}_* = A_k \oplus \bigoplus_{f_{n,j} \in G_k} A \cdot f^{(k)}_{n,j}$$

dove A_k si decompone come

$$A_n = \bigoplus_{i=1}^{K} \Gamma_i$$

essendo i Γ_i sottocomplessi aciclici "elementari"

$$\Gamma_i := \left[0 \to A.b_i^{(K)} \longrightarrow A\, a_i^{(K)} \to 0 \right]$$

dove l'omomorfismo centrale è dato dalla moltiplicazione per $w(b_i, a_i)$ e quindi è isomorfismo

2) Il bordo ∂ induce su C_K un bordo $\partial^{(K)}$ che è dato dalla formula del complesso di Morse rispetto al matching $M^{(K)}$.

Per $n=0$ si ha $A_0 = 0$ e $\partial^{(0)} = \partial$.

Consideriamo $M^{(n+1)} = M^{(n)} \cup \{(a_{n+1}, b_{n+1})\}$. Poiché $M^{(n+1)}$ è aciclico, non ci sono cammini alternanti in $M^{(n)}$ fra b_{n+1} e a_{n+1}, ad eccezione di quello banale $b_{n+1} \to a_{n+1}$.

Quindi il coefficiente di $a^{(n)}_{n+1}$ in $\partial^{(n)} b^{(n)}_{n+1}$ è $w(b_{n+1}, a_{n+1})$. Ora scriviamo:

$$a^{(n+1)}_{n+1} = \partial^{(n)} b^{(n)}_{n+1} = w(b_{n+1}, a_{n+1})\, a^{(n)}_{n+1} + \sum_{f_{n,j} \in G_n} c(b_{n+1}, f^{(n)}_{n,j})\, f^{(n)}_{n,j}$$

dove i coefficienti sono calcolati per induzione dalle formule sopra.

Si noti che la torsione di $a^{(h+1)}_{h+1}$ è la stessa di $a^{(h)}_{h+1}$ per definizione di matching (e perché l'immagine di un elemento ha torsione che divide la torsione dell'elemento).

Ora $\forall$ $f_{n,j} \in G_k$, con $n = \dim b_{h+1}$, facciamo la sostituzione:

$$\begin{cases} b^{(h+1)}_{h+1} = b^{(h)}_{k+1} \\ f^{(h+1)}_{n,j} = f^{(h)}_{n,j} - w(b_{h+1}, a_{h+1})^{-1} c\left(a^{(k)}_{k+1}, \partial^{(k)} f^{(k)}_{n,j}\right) b^{(h)}_{k+1} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} b^{(h)}_{h+1} \arrow[dr, dash] & & f^{(h)}_{n,j} \arrow[dl, dash] \\ & a^{(k)}_{h+1} & \end{tikzcd}$$

dove $c(\,,\,)$ è il coeff. di $a^{(k)}_{h+1}$ in $\partial^{(h)} f^{(k)}_{n,j}$ calcolato con la formula.

Anche qui: $\mathrm{lvs}\, f^{(n+1)}_{m,j} = \mathrm{lvs}\, f^{(n)}_{m,j}$.

Per i rimanenti elementi lasciamo $f^{(n+1)}_{m,j} = f^{(n)}_{m,j}$.

Applichiamo la proposizione precedente con

$f_1 = b^{(n)}_{n+1}$, $f_2 = a^{(n)}_{n+1}$, e numerando successivamente gli altri

$f^{(n)}_{m,j} \in G_k \setminus \{a_{n+1}, b_{n+1}\}$; poniamo:

$$g_1 = f_1 \quad , \quad g_2 = a^{(n)}\, b^{(n+1)}_{n+1} = a^{(n+1)}_{k+1}$$

e tutti gli altri g_i come nella formula sopra,

otteniamo:

$$C_* = A_{n+1} \oplus \bigoplus_{f_{n,j} \in G_{n+1}} A \cdot f_{n,j}^{(n+1)} \qquad \text{con}$$

$$A_{n+1} = A_n \oplus \Gamma_{n+1}$$

essendo $\Gamma_{n+1} = \left[0 \to A\, b_{k+1}^{(k+1)} \to \underline{A\, a_{k+1}^{(n+1)}} \to 0 \right]$

$$f_{n,j}^{(n+1)} = f_{n,j}^{(n)} - w(b_{n+1}, a_{n+1})^{-1} c\left(a_{k+1}^{(k)}, \partial^{(k)} f_{n,j}^{(k)} \right) b_{k+1}^{(n)}$$

$$w\left(f_{n,j}^{(n+1)}, a_{n+1}^{(n+1)} \right) = 0 \qquad (\text{che } a_{n+1}^{(n+1)} \text{ è isolato})$$

e quindi $\Rightarrow c\left(\partial^n f_{-}^{(n+1)}, b_{n+1}^{(n+1)} \right) = 0$.

Per costruzione $\partial^{(n+1)}$ cambia, rispetto a $\partial^{(n)}$, solo per quei cammini alternanti che contengono il lato (a_{n+1}, b_{n+1}); da cui si ottiene la formula.