1 (a) $\qquad f_a(x,y) = x^2 - \log(a + x^2 + y^2) \qquad , a \in \mathbb{R}.$

Intanto descriviamo il dominio di f :

$x^2 + y^2 > -a \qquad$ se $\quad a > 0 \qquad D(f_a) = \mathbb{R}^2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ se $\quad a \leq 0 \qquad D(f_a) = \mathbb{R}^2 - \{x^2 + y^2 \leq |a|\}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - \dfrac{2x}{a + x^2 + y^2} = \dfrac{2x}{a + x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + a - 1) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2y}{a + x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda $y = 0$, mentre la prima dà $x = 0$ oppure $x^2 = 1 - a$

Quindi si hanno $P \equiv (0,0)$, che sta in $D(f_a)$ se $a > 0$.

$Q \equiv (\sqrt{1-a}, 0)$, $Q' \equiv (-\sqrt{1-a}, 0)$, se $a \leq 1$.

Usando l'Hessiano:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - 2\,\frac{a+x^2+y^2-2x^2}{(a+x^2+y^2)^2} = 2\left(1 - \frac{a-x^2+y^2}{(a+x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\,\frac{a+x^2+y^2-2y^2}{(a+x^2+y^2)^2} = -2\,\frac{a+x^2-y^2}{(a+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4xy}{(a+x^2+y^2)^2}$$

quindi

$$H(P) = \begin{bmatrix} 2\left(1-\frac{1}{a}\right) & 0 \\ 0 & -\frac{2}{a} \end{bmatrix}$$

definito per $a > 0$. Quindi

per $0 < a < 1$ P è un max, per $a > 1$ un punto di sella.

Per $a = 1$ lo sviluppo di Taylor in (0.0) dà

$$f_1(x,y) = \cancel{x^2} - \cancel{x^2} - y^2 + \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 + \dots$$

che è un punto di sella.

$$H(Q) = H(Q') = \begin{bmatrix} 4(1-a) & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

definito per $a \leq 1$; per $a < 1$ sono punti di sella; per $a = 1$ $P = Q = Q'$ è considerato sopra.

6) Col vincolo $x^2+y^2=1$ e $a=1$, la funzione da studiare diventa $x^2 - \log(2)$; sulla circonferenza $x^2+y^2=1$ che questa funzione assume minimo per $x=0$, e quindi $y=\pm 1$, e assume massimo per $x=\pm 1$, e quindi $y=0$.

2. Il dominio è $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3 \setminus$ asse x che non è semplicemente connesso (un cammino chiuso che gira intorno all'asse x non può ritrarsi a un punto nel dominio).

Facendo le derivate parziali miste si ottiene che la condizione necessaria

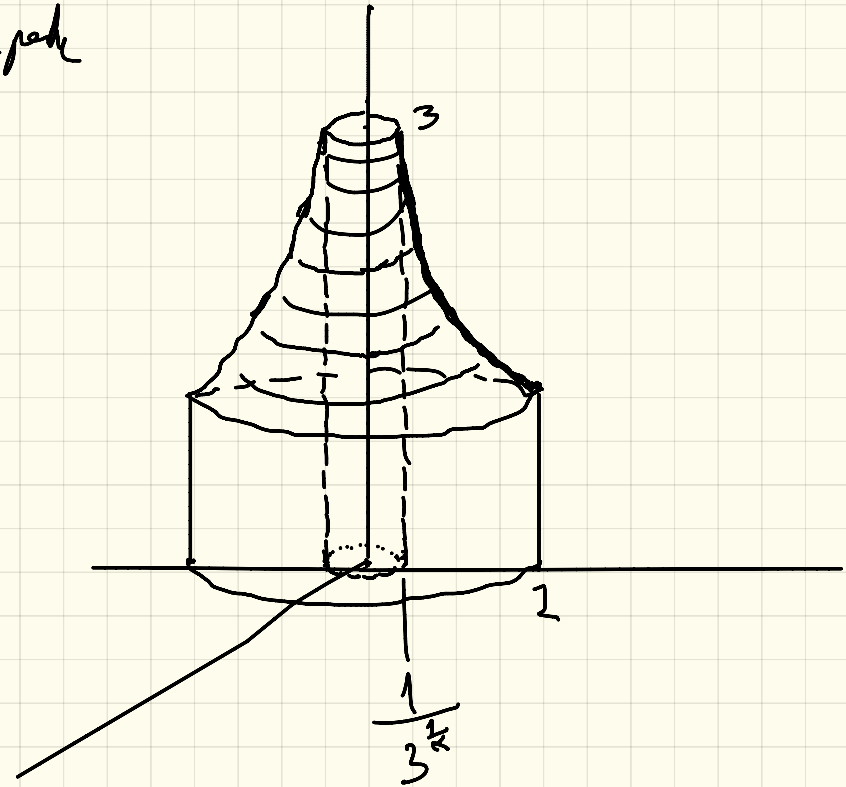
$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ è verificata. Per mostrare che è anche sufficiente, calcoliamo il potenziale di $\vec{F}$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{y^2+z^2} \Rightarrow \varphi(x,y,z) = \frac{x}{y^2+z^2} + c(y,z) \quad ;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{2xy}{(y^2+z^2)^2} + \frac{\partial c}{\partial y} = -\frac{2xy}{(y^2+z^2)^2} \Rightarrow c = c(z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{2xz}{(y^2+z^2)^2} + \frac{\partial c}{\partial z} = -\frac{2xz}{(y^2+z^2)^2} \Rightarrow \varphi = \frac{x}{y^2+z^2} + c$$

Es 1 seconda parte



S_α si può spezzare in diversi modi:

<u>I modo</u>: $S_\alpha = C' \cup S'_\alpha$ dove

C' è il cilindro $0 \le z \le 1$, $r \le 1$ e

$$S'_\alpha = \left\{ 1 \le z \le 3,\quad 0 \le r \le \frac{1}{z^{1/\alpha}} \right\}$$

$\mathrm{Vol}\, C' = \pi$

$$\mathrm{Vol}\, S'_\alpha = \int_1^3 \pi \frac{1}{z^{2/\alpha}}\, dz = \begin{cases} \dfrac{\alpha\pi}{\alpha-2}\left[z^{1-\frac{2}{\alpha}}\right]_1^3 = \dfrac{\alpha\pi}{\alpha-2}\left(3^{1-\frac{2}{\alpha}} - 1\right) & \text{se } \alpha \neq 2 \\ \pi\left[\log z\right]_1^3 = \pi \log 3 & \text{se } \alpha = 2 \end{cases}$$

quindi
$$\mathrm{Vol}\, S_\alpha = \begin{cases} \pi\left(1 - \dfrac{\alpha}{\alpha-2} + \dfrac{\alpha}{\alpha-2} 3^{1-\frac{2}{\alpha}}\right) = \dfrac{\pi}{\alpha-2}\left(\alpha\, 3^{1-\frac{2}{\alpha}} - 2\right) & \text{se } \alpha \neq 2 \\ \pi\left(1 + \log 3\right) & \text{se } \alpha = 2 \end{cases}$$

<u>II modo</u> $S_\alpha = C'' \cup S''_\alpha$. dove C'' è il cilindro $0 \le z \le 3$, $r \le 1/3^{1/\alpha}$ e

S''_α = sottografico di $f(x,y) = \dfrac{1}{r^\alpha}$ nel dominio $D = \left\{ \dfrac{1}{3^{1/\alpha}} \le r \le 1 \right\}$

$$\mathrm{Vol}\, C'' = \pi \frac{1}{3^{2/\alpha}} \cdot 3 = \pi\, 3^{1-\frac{2}{\alpha}}$$

$$\mathrm{Vol}(S''_\alpha) = \iint_D \frac{1}{r^\alpha}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/3^{1/\alpha}}^{1} \frac{1}{r^\alpha}\, r\, dr = 2\pi \int_{1/3^{1/\alpha}}^{1} r^{1-\alpha}\, dr =$$

$$\frac{2\pi}{2-\alpha}\left[r^{2-\alpha}\right]_{\frac{1}{3^{1/\alpha}}}^{1} = \frac{2\pi}{2-\alpha}\left(1 - \frac{1}{3^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}\right) \qquad \text{se } \alpha \neq 2$$

$$2\pi\left[\log r\right]_{\frac{1}{3^{1/2}}}^{1} = -2\pi \log 3^{-\frac{1}{2}} = \pi \log 3 \qquad \text{se } \alpha = 2$$

quindi $$\mathrm{Vol}\, S_\alpha = \pi\left(3^{1-\frac{2}{\alpha}} + \frac{2}{2-\alpha} - \frac{2}{(2-\alpha)\,3^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}\right) = \frac{\pi}{2-\alpha}\left(-\alpha\, 3^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} + 2\right) = \frac{\pi}{\alpha-2}\left(\alpha\, 3^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} - 2\right) \quad (\alpha \neq 2)$$

$$= \pi(1 + \log 3) \quad (\alpha = 2)$$

Poiché S_α è invariante per qualunque rotazione rispetto all'asse z, il baricentro deve rimanere fermo per tale rotazione, quindi sta sull'asse z, cioè le sue coordinate x, y sono 0. La coordinata z_G si trova

$$z_G = \frac{\iiint_{S_\alpha} z\,dV}{\iiint_{S_\alpha} dV} = \frac{\iiint_{S_\alpha} z\,dV}{Vol(S_\alpha)}\,.$$

Procedendo ad es col metodo I segue:

$$\iiint_{S_\alpha} z\,dV = \iiint_{C'} z\,dV + \int_1^3 \pi z \frac{1}{z^{2/\alpha}}\,dz = \int_0^1 \pi z\,dz + \pi\int_1^3 z^{1-\frac{2}{\alpha}}\,dz = \frac{\pi}{2} + \pi\frac{\alpha\left[3^{\frac{2\alpha-2}{\alpha}}-1\right]}{2\alpha-2}$$

se $\alpha \neq 1$

$$= \frac{\pi}{2} + \pi\log 3 \qquad \text{se } \alpha = 1$$

Quindi

$$z_\alpha = \frac{\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(3^{\frac{2\alpha-2}{\alpha}}-1\right)\right)}{\frac{\pi}{\alpha-2}\left(\alpha\, 3^{\frac{\alpha-2}{\alpha}}-2\right)} = \frac{\alpha-2}{2(\alpha-1)}\frac{\left(\alpha-1+\alpha\, 3^{\frac{2\alpha-2}{\alpha}}-\alpha\right)}{\left(\alpha\, 3^{\frac{\alpha-2}{\alpha}}-2\right)} = \frac{\alpha-2}{2(\alpha-1)}\frac{\left(3^{2-\frac{2}{\alpha}}-1/\alpha\right)}{\left(3^{1-\frac{2}{\alpha}}-2/\alpha\right)}$$

se $\alpha \neq 1$

Quindi $\lim_{\alpha\to\infty} z_\alpha = \frac{3}{2}$

Es. 2 seconda parte

(a) $\mathrm{dist}(A_0 A_1) = \sqrt{0^2+2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$, $\mathrm{dist}(A_1, A_2) = \sqrt{2^2+2^2+0^2} = 2\sqrt{2}$, ecc.

(b)

	E	$8C_3$	$3C_2$	$6\sigma_d$	$6S_4$
θ	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	0	$\frac{\pi}{2}$
$2\cos\theta \pm 1$	3	0	-1	1	-1
u_n	4	1	0	2	0
$\chi(R)$	12	0	0	2	0

(c)

$$a_1 = \frac{1}{24}\left(12 + 0 + 0 + 12 + 0\right) = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{24}\left(12 + 0 + 0 - 12 + 0\right) = 0$$

$$a_3 = \frac{1}{24}\left(24 + 0 + 0 + 0 + 0\right) = 1$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(36 + 0 + 0 + 12 + 0) = 2$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(36 + 0 + 0 - 12 + 0) = 1$$

(d) (i) Le coordinate del baricentro sono date dalla media delle coordinate dei punti:

$$x_G = \frac{1}{4}(1+1-1-1) = 0$$

$$y_G = \frac{1}{4}(1-1+1-1) = 0$$

$$z_G = \frac{1}{4}(1-1-1+1) = 0$$

Poiché i punti vengono permutati da una simmetria, le medie delle coordinate non variano.

(ii) Se fosse riducibile ci dovrebbe essere una retta passante per l'origine invariante per ogni simmetria, e si vede facilmente che non c'è. Quindi la rappresentazione coincide con la F_1 o la F_2. Se prendiamo una σ_d,

ad esempio la riflessione rispetto al piano che passa per $(1,1,1)$, $(-1,-1,1)$ e per $(-1,-1,-1)$, $(1,1,-1)$, si vede che i vettori di base $\vec{i}, \vec{j}$ si scambiano tra loro, mentre $\vec{k}$ rimane fisso. Quindi $\mathrm{tr}\, \sigma_d = 1$, e pertanto la rappresentazione è la F_1.