Soluzione seconda parte del compito 12/9/2018

Es. 1 $f_a(x,y) = (x-1)\, e^{ax^2-y^2}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial f_a}{\partial x} = (2ax^2 - 2ax + 1)\, e^{ax^2-y^2}$$

$$\frac{\partial f_a}{\partial y} = 2(1-x)\, y\, e^{ax^2-y^2}$$

Si ha $\frac{\partial f_a}{\partial y} = 0 \iff y = 0$ oppure $x = 1$

Per $x = 1$ $\frac{\partial f_a}{\partial x} = e^{a-y^2} \neq 0 \quad \forall y$, quindi i punti critici

hanno $y = 0$ e x che risolve $2ax^2 - 2ax + 1 = 0$

Per $a = 0$ non ci sono soluzioni. Se $a \neq 0$:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2a}}{2a} = \frac{a \pm \sqrt{a(a-2)}}{2a}$$ Quindi non ci sono punti critici

se $a \in [0,2)$; se $a = 2$ c'è il punto critico $P \equiv (\frac{1}{2}, 0)$; se

$a<0$ oppure $a>2$ ci sono 2 punti critici

$$P_1 \equiv \left(\frac{a+\sqrt{a(a-2)}}{2a} ; 0\right) ; \quad P_2 \equiv \left(\frac{a-\sqrt{a(a-2)}}{2a} ; 0\right)$$

Calcoliamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{ax^2-y^2} \cdot 2a\left(2ax^3-2ax^2+3x-1\right) = e^{ax^2-y^2}\,2a\Big(x\overbrace{(2ax^2-2ax+1)}^{=0 \text{ in } P_{1,2}}+2x-1\Big)$$

Trascurando l'esponenziale che è sempre >0, nei punti critici il segno è lo stesso di

$$2a(2x-1) = 2\left[a \pm \sqrt{a(a-2)}\right] - 2a = \pm\sqrt{a(a-2)} \quad \begin{matrix} >0 & \text{in } P_1 \\ <0 & \text{in } P_2 \end{matrix}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{ax^2-y^2}\left((2x-2)y^2+1-x\right)$ che nei punti critici ha lo stesso segno

di $$1-x = \frac{2a-\left(a \pm \sqrt{a(a-2)}\right)}{2a} = \begin{cases} \dfrac{a-\sqrt{a(a-2)}}{2a} & \text{in } P_1 \\[2ex] \dfrac{a+\sqrt{a(a-2)}}{2a} & \text{in } P_2 \end{cases}$$

ora: se $a>2$ sia $\frac{a+\sqrt{a(a-2)}}{2a}$ che $\frac{a-\sqrt{a(a-2)}}{2a}$ sono >0. Se $a<0$, $\frac{a-\sqrt{a(a-2)}}{2a}>0$, $\frac{a+\sqrt{a(a-2)}}{2a}<0$.

Quindi $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ è >0 sia in P_1 che P_2 se $a>2$, mentre se $a<0$

è positiva in P_1 e negativa in P_2.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2e^{ax^2-y^2}\, y\left(-2ax^2+2ax-1\right)$ si annulla in $P_{1,2}$.

Segue:

P_1 è sempre un minimo locale; P_2 è una sella se $a>2$, è un

massimo locale se $a<0$.

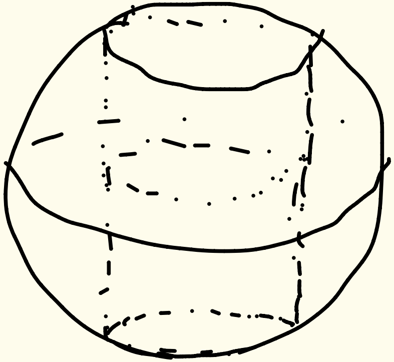
Per $a=2$ si ha $f_2(x,y)=(x-1)\,e^{2x^2-y^2}$ che ha un solo punto critico in

$P=\left(\frac{1}{2},0\right)$; l'Hessiano si annulla in P. Si vede (sviluppando al 3° ordine) che

P è una sella quantitativa (il grafico attraversa il piano tangente in P) del

tipo "sella di scimmia".

Es. 2



Si può calcolare il volume contenuto nell'emisfero superiore:

$$\frac{1}{2} Vol = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{v} d\rho \int_0^{\sqrt{u^2-\rho^2}} \rho \, dz = 2\pi \int_0^{v} \rho\sqrt{u^2-\rho^2}\, d\rho = 2\pi \left[-\frac{1}{3}(u^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{v} =$$

$$\frac{2\pi}{3}\left[u^3-(u^2-v^2)^{\frac{3}{2}}\right] \Rightarrow Vol = \frac{4}{3}\pi\left[u^3-(u^2-v^2)^{\frac{3}{2}}\right]$$

La parte esterna al cilindro ha volume

$$\frac{4}{3}\pi u^3 - Vol = \frac{4}{3}\pi\left[\cancel{u^3}-\cancel{u^3}+(u^2-v^2)^{\frac{3}{2}}\right]$$

e l'uguaglianza si ha se

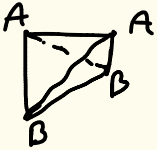
$$u^3-(u^2-v^2)^{\frac{3}{2}} = (u^2-v^2)^{\frac{3}{2}}$$

cioè: $u^3 = 2\left(\sqrt{u^2-v^2}\right)^3 \Rightarrow$

$$u^2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 \left(u^2 - v^2\right) \Rightarrow \left(\sqrt[3]{4} - 1\right) u^2 = \sqrt[3]{4}\, v^2 \Rightarrow \frac{v^2}{u^2} =$$

$$\Rightarrow \frac{v}{u} = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{4} - 1}{\sqrt[3]{4}}}$$

Es. 3 a)



oltre all'identità,
c'è un C_2 che passa per i punti di mezzo dei lati AA, BB, ci sono 2 σ che passano per AA e per il punto di mezzo di BB e
" BB " " " ...... AA

	E	C_2	σ	σ'
	0	π	0	0
	3	-1	1	1
	4	0	2	2
	12	0	2	2

$$a_1 = \frac{1}{4}\left(12 + 2 + 2\right) = 4 \qquad a_3 = \frac{1}{4}\left(12 + 2 - 2\right) = 3$$

$$a_2 = \frac{1}{4}\left(12 - 2 - 2\right) = 2 \qquad a_4 = \frac{1}{4}\left(12 - 2 + 2\right) = 3$$