Prima Parte

1) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^{x^2+2y^2} - 2x e^{-x^2+1} = 2x\left(e^{x^2+2y^2} - e^{-x^2+1}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y e^{x^2+2y^2} - 4y e^{-2y^2+1} = 4y\left(e^{x^2+2y^2} - e^{-2y^2+1}\right) = 0$$

i) $x=0,\ y=0$

ii) $x=0,\ y\neq 0 \Rightarrow e^{2y^2} = e^{-2y^2+1} \Rightarrow 2y^2 = -2y^2+1 \Leftrightarrow$

$4y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{2}$

iii) $y=0,\ x\neq 0 \Rightarrow e^{x^2} = e^{-x^2+1} \Rightarrow x^2 = -x^2+1 \Rightarrow$

$2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

iv) $x \neq 0,\ y \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{x^2+2y^2} = e^{-x^2+1} \\ e^{x^2+2y^2} = e^{-2y^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2y^2 = -x^2+1 \\ x^2+2y^2 = -2y^2+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = \frac{1}{2} \\ x^2+4y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 3y^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

(4 punti)

Nel primo quadrante ci sono: $A \equiv (0,0)$, $B \equiv \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $C \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $D \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\left(e^{x^2+2y^2} - e^{-x^2+1} + 2x^2 e^{x^2+2y^2} + 2x^2 e^{-x^2+1}\right) =$$

$$= 2\left((2x^2+1)e^{x^2+2y^2} + (2x^2-1)e^{-x^2+1}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8xy\, e^{x^2+2y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\left((4y^2+1)e^{x^2+2y^2} + (4y^2-1)e^{-2y^2+1}\right)$$

Quindi in A:

$$H = \begin{bmatrix} 2(1-e) & 0 \\ 0 & 4(1-e) \end{bmatrix}$$

e siccome $1-e<0$ A è un max.

In B:

$$H = \begin{bmatrix} 2(e^{\frac{1}{2}}-e) & 0 \\ 0 & 8e^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

quindi B è una sella

In C:

$$H = \begin{bmatrix} 6e^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 4\left(e^{\frac{1}{2}} - e\right) \end{bmatrix}$$

quindi C è una sella

In D:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\left(\frac{5}{3} e^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} e^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{8}{3} e^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{8}{3\sqrt{2}} e^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\left(\frac{5}{3} e^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} e^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{16}{3} e^{\frac{2}{3}}$$

$$\det H = e^{\frac{4}{3}}\left(\frac{8}{3} \cdot \frac{16}{3} - \frac{32}{9}\right) = e^{\frac{4}{3}} \frac{32}{3} > 0$$

quindi D è un minimo

Poiché l'esponenziale è sempre positivo e poiché

$$\lim_{(x,y)\to\infty} x^2+2y^2 = +\infty \quad \text{(ovvio esercizio!)}$$

si ha $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = +\infty$

---

2) Dal punto finale dell'esercizio precedente

$$\lim_{\substack{(x,y)\to\infty \\ (x,y)\in \text{vincolo}}} f(x,y) = +\infty \text{ , quindi non ci sono}$$

massimi vincolati (assoluti). Sostituendo $y = \frac{1}{\sqrt{2}} x$

nella f, si trova

$$g(x) = f\left(x, \frac{1}{\sqrt{2}} x\right) = e^{2x^2} + 2e^{-x^2+1}$$

$$g'(x) = 4x\, e^{2x^2} - 4x\, e^{-x^2+1} = 0 \quad \text{o per} \quad x = 0 \quad (\Rightarrow y = 0)$$

o per $e^{2x^2} = e^{-x^2+1} \Rightarrow 2x^2 = -x^2 + 1 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

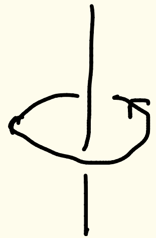
che dà che di punti critici di f $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

Siccome $(0,0)$ era un massimo per f, si ha che

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ sono punti di minimo (assoluti) vincolati.

3) $D = \{x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus$ asse z

D non è semplicemente connesso perché un cammino chiuso che avvolge l'asse z non si riduce in D a un punto.



Si ha che $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$

quindi $\vec{F}$ non è conservativo.

Il vettore tangente alla curva data è:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1) \qquad \text{quindi}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^{2\pi} \left(-\operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t) - \cos t(\cos t) + 1\right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t + 1\right) dt = \int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} 1 - \cos(2t) \, dt =$$

$$\left[t - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

SECONDA PARTE

a) In coordinate sferiche:

$$\mathrm{Vol}\, D_{\alpha,\beta} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\beta} d\varrho \int_0^{\alpha} \varrho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\beta} \varrho^2 \left[-\cos\varphi\right]_0^{\alpha} d\varrho = 2\pi (1-\cos\alpha) \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^{\beta} =$$

$$= \frac{2\pi}{3}(1-\cos\alpha)\,\beta^3$$

(b) Per ovvi motivi di simmetria il baricentro si trova sull'asse z (qualunque solido di rotazione attorno a un asse ha baricentro su quell'asse: provo a dimostrarlo in generale). Per le coordinate $z_G = \iiint_D z\, dV \Big/ \iiint_D dV$

Il denominatore è stato calcolato; il numeratore è dato da:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\beta} d\rho \int_0^{\alpha} (\rho \cos\varphi)\, \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi =$$

[perché in coordinate sferiche $z = \rho\cos\varphi$]

$$= 2\pi \int_0^{\beta} \rho^3 \int_0^{\alpha} \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{\pi\beta^4}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2} \right]_0^{\alpha} = \frac{\pi\beta^4}{4} \operatorname{sen}^2\alpha$$

Quindi $z_G = \frac{\pi\beta^4}{4}(1-\cos^2\alpha) \Big/ \frac{2}{3}\pi(1-\cos\alpha)\beta^3 =$

$$= \frac{3}{8}\beta(1+\cos\alpha)$$

[solo compitino]

$$\mathrm{Vol}\ D_{\left(\frac{1}{\beta^\gamma},\beta\right)} = \frac{2}{3}\pi\left(1-\cos\left(\frac{1}{\beta^\gamma}\right)\right)\beta^3$$

sviluppando vicino a $\beta = 0$:

$$\mathrm{Vol} \simeq c\left(1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{\beta^{2\gamma}}+\cdots\right)\right)\beta^3 = \frac{c}{2}\beta^{3-2\gamma}(1+\text{resto})$$

e se $3-2\gamma<0$, cioè $\gamma>\frac{3}{2}$ il $\lim_{\beta\to\infty}$ vine 0.

---

2) a) le rotazioni sono: l'identità, la rotazione di angolo $\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$ attorno alla retta di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$
(che passa per A_0 e per il centro del triangolo A_1, A_2, A_3; le riflessioni rispetto ai 3 piani che contengono le rette precedenti e uno dei 3 atomi A_1, A_2, A_3.
Le equazioni di tali piani sono:

$y=z$, $x=z$. $x=y$.

b) Con le regole dette, si trova

$$\chi(E) = 12, \quad \chi(C_3) = 0, \quad \chi(\sigma_v) = 2$$

da cui applicando la formula

$$a_i = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^{h} \chi(R_j)\, \chi_i(R_j)$$ si trova

$$a_1 = \frac{12 + 3 \cdot 2}{6} = 3$$

$$a_2 = \frac{12 - 3 \cdot 2}{6} = 1$$

$$a_3 = \frac{12 \cdot 2}{6} = 4$$

[solo compitino o facoltativo]

In questo caso si trova

$$\chi(E) = 3(4+n), \quad \chi(C_3) = 0, \quad \chi(\sigma_v) = 2+n$$

da cui

$$a_1 = \frac{1}{6}\left(12+3n + 3(2+n)\right) = 3+n$$

$$a_2 = \frac{1}{6}\left(12+3n - 3(2+n)\right) = 1$$

$$a_3 = \frac{1}{6}\left(6(4+n)\right) = 4+n$$