Compito 12/9/2017

Nome e cognome (stampatello) ....;

matricola..............................

1. (a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare e studiare i punti critici della funzione
$$f_k(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3 + (x + \frac{1}{2}k)y^2 - 2x, \quad k \in \mathbb{R}.$$
   (b) Per $k = 0$, determinare gli estremi vincolati di f_0 sul vincolo $\{x^2 + y^2 = 4\}$.

2. Sia $\vec{v}$ un vettore unitario non nullo e sia $\vec{F}$ il campo di vettori
$$\vec{F}(\vec{r}) = \ \vec{v} \times \frac{\vec{r}}{r}, \quad r \neq 0,$$
dove $\vec{r} \equiv (x,y,z)$ è il vettore posizione e $r = \|r\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ è la sua lunghezza (con $\times$ si indica il prodotto vettore). Dire (giustificandolo) se il dominio di $\vec{F}$ è semplicemente connesso e se il campo è conservativo.

3. Determinare $a > 0$ in modo che il volume di
$$T_a = \{(x,y,z) : \ x^2 - y^2 - z^2 = 1, \ -a \leq x \leq a\}$$
sia uguale a π.

4. Sia data una molecola A, A, A, B, G con 3 atomi A a formare un triangolo equilatero, 1 atomo B posto sull'asse passante per il centro del triangolo e ortogonale al piano Π del triangolo, a distanza 1 dal piano Π, e 1 atomo G nel centro del triangolo.
   (a) Determinare il carattere della rappresentazione totale Γ del gruppo C_{3v} completando la tabella (I) allegata;
   (b) Decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I)).
   (c) Scrivere anche il carattere della rappresentazione che si ottiene prendendo 5 versori, uno per ogni atomo, rivolti verso il punto medio del segmento BG.

==============================

Il gruppo $\mathcal{C}_{3v}$ ha 6 elementi $E,\ 2C_3,\ 3\sigma_v$ e ha 3 rappresentazioni irriducibili ($A_1,\ A_2,\ B$) con tavola dei caratteri

	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
θ	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$2cos(\theta) \pm 1$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
u_n	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\chi(R)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

(I)

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale si determina considerando, per ogni elemento del gruppo, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando $(u_n) * (2cos(\theta) \pm 1)$ secondo che l'elemento sia una rotazione propria o impropria di angolo θ.

Γ_i	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
B	2	-1	0