

Compito 1/2/2018

Nome e cognome (stampatello) .....

matricola.....

**PRIMA PARTE**

1. Sia

$$f(x, y) = \frac{1}{\sin(x)} + \frac{1}{\sin(y)}.$$

Descrivere e disegnare il dominio di  $f(x, y)$ .

Classificare i punti critici di  $f(x, y)$ .

2. Determinare gli estremi vincolati della  $f(x, y)$  dell'esercizio precedente, soggetta al vincolo  $x + y = \pi$ .

3. Dato il campo piano

$$\vec{F} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2 - 1}} \vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2 - 1}} \vec{j}$$

descrivere il dominio di  $\vec{F}$  e dire se è semplicemente connesso. Dire anche se  $\vec{F}$  è conservativo e in caso affermativo determinarne un potenziale.

Nome e cognome (stampatello) .....

matricola.....

## SECONDA PARTE

1. Sia  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Per  $a, b > 0$ , si considerino i due luoghi di zeri

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2}z^2\}$$

e

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r^2 = \frac{a^2}{b^2}z^2\}.$$

- Dimostrare che  $H$  e  $C$  sono di rotazione intorno all'asse  $z$  e disegnare (nello stesso piano cartesiano) le loro intersezioni con un piano passante per l'asse  $z$ .
  - Dimostrare che il volume del solido  $S$  compreso tra  $H$  e  $C$  e tra i piani  $z = 0$  e  $z = h$  è uguale a quello del cilindro avente raggio di base  $a$  e altezza  $h$ .
  - Calcolare le coordinate del baricentro di  $S$ .
2. Data la molecola con atomi uguali nei punti

$$A_1 \equiv (-1, 1, 1), \quad A_2 \equiv (1, -1, 1), \quad A_3 \equiv (1, 1, -1)$$

- Dimostrare che gli atomi formano un triangolo equilatero e determinare le coordinate del baricentro. Determinare l'equazione cartesiana di un piano che contiene la molecola.
- Determinare il carattere della rappresentazione totale  $\Gamma$  del gruppo di simmetria  $D_{3h}$  completando la tabella (I) allegata;
- Decomporre la rappresentazione  $\Gamma$  nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I));
- [facoltativo] Dire se la rappresentazione di ordine 2 del gruppo di simmetria ottenuta prendendo due versori nel baricentro, giacenti nel piano della molecola, coincide con la  $E'$  oppure con la  $E''$  in tabella.

---

Il gruppo  $D_{3h}$  ha 12 elementi  $E, \sigma_h, 2C_3, 2S_3, 3C'_2, 3\sigma_v$ , e ha 6 rappresentazioni irriducibili con tavola dei caratteri

$\Gamma_i$	$E$	$\sigma_h$	$2C_3$	$2S_3$	$3C'_2$	$3\sigma_v$
$A'_1$	1	1	1	1	1	1
$A'_2$	1	1	1	1	-1	-1
$A''_1$	1	-1	1	-1	1	-1
$A''_2$	1	-1	1	-1	-1	1
$E'$	2	2	-1	-1	0	0
$E''$	2	-2	-1	1	0	0

(\*)

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale si determina considerando, per ogni elemento del gruppo, il numero  $u_n$  di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando  $(u_n) * (2\cos(\theta) \pm 1)$  secondo che l'elemento sia una rotazione propria o impropria di angolo  $\theta$ .

	$E$	$\sigma_h$	$2C_3$	$2S_3$	$3C'_2$	$3\sigma_v$
$\theta$	...	...	...	...	...	...
$2\cos(\theta) \pm 1$	...	...	...	...	...	...
$u_n$	...	...	...	...	...	...
$\chi(R)$	...	...	...	...	...	...

(I)