Istituzioni di Matematiche II, 1/12/2017.

Coloro che fanno il compitino devono risolvere gli esercizi 1,2,3,4; chi fa il compito straordinario deve risolvere gli esercizi 2,3,4,5,6.

1. Data la curva parametrica $C = \begin{cases} x = e^{-kt}cos(t) \\ y = e^{-kt}sen(t) \\ z = e^{-kt} \end{cases}$ dire se la lunghezza di C per $t \in [0, +\infty)$ è finita e in caso positivo calcolarla.

   Se C rappresenta un filo di densità di massa $\delta(x, y, z) = z$ calcolare la massa totale di C (per $t \in [0, +\infty)$).

2. Trovare i punti critici della funzione

$$f_{a,b}(x, y) \;=\; 2a^2x^2 + 2b^2y^2 - x^4 - y^4, \quad a, b > 0.$$

   e classificarli.

   Stessa domanda quando $a = 0, b \neq 0$, e per $a = b = 0$.

3. Determinare gli estremi della funzione $f_{a,b}(x, y)$ dell'esercizio precedente quando $a = 2$ e $b = 1$, sul vincolo $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

4. Sia $\vec{F}$ il campo di vettori dato in coordinate cartesiane ortogonali da:

$$\vec{F}(x, y, z) \equiv (\frac{-y}{\sqrt{1 - 2xy}}, \frac{-x}{\sqrt{1 - 2xy}}, 1).$$

   (a) Descrivere il dominio D del campo $\vec{F}$ e dire se si ritiene che D sia semplicemente connesso, nel qual caso giustificarlo.

   (b) Dire se il campo è conservativo e in caso affermativo determinarne un potenziale.

5. Dimostrare che l'area del dominio C_α compreso tra due parabole, dato da

$$C_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \geq (\alpha + 1)x^2 - 1, \; y \leq \alpha x^2\}$$

   non dipende da $\alpha \in \mathbb{R}$, e calcolarla.

6. Sia data una molecola A, A, A, B, B dove AAA forma un triangolo equilatero e i due B sono nella retta ortogonale al piano del triangolo che passa per il baricentro, da parti opposte rispetto a tale piano e alla stessa distanza dal baricentro.

   (a) Descrivere geometricamente una operazione di simmetria S_3 e una C_2 del gruppo D_{3h} della molecola;

   (b) Determinare il carattere della rappresentazione totale Γ del gruppo di simmetria D_{3h} completando la tabella (I) allegata;

   (c) Decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I)).

Il gruppo $\mathcal{D}_{3h}$ ha 12 elementi $E, \sigma_h,\ 2C_3,\ 2S_3, 3C'_2, 3\sigma_v$, e ha 6 rappresentazioni irriducibili con tavola dei caratteri

Γ_i	E	σ_h	$2C_3$	$2S_3$	$3C'_2$	$3\sigma_v$
A'_1	1	1	1	1	1	1
A'_2	1	1	1	1	-1	-1
$A"_1$	1	-1	1	-1	1	-1
$A"_2$	1	-1	1	-1	-1	1
E'	2	2	-1	-1	0	0
$E"$	2	-2	-1	1	0	0

$(*)$

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale si determina considerando, per ogni elemento del gruppo, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando $(u_n) * (2cos(\theta) \pm 1)$ secondo che l'elemento sia una rotazione propria o impropria di angolo θ.

	E	σ_h	$2C_3$	$2S_3$	$3C'_2$	$3\sigma_v$
θ	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$2cos(\theta) \pm 1$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
u_n	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\chi(R)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

(I)