Compito 6/7/2016

Nome e cognome (stampatello) ....;

matricola..............................

1. (a) Data la funzione

$$f_a(x, y) = e^{x^3+x^2+axy+y^2}, \quad a \in \mathbb{R}$$

determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ i punti critici di f_a.
Classificare tali punti per $a = 1$ e $a = 2$.
[Si consiglia, quando non si possa applicare il criterio dell'Hessiano, di utilizzare sviluppi noti].

(b) Determinare il punto di minima distanza della superficie ellissoidale in $\mathbb{R}^3$ di equazione

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$$

dal punto $P \equiv (3, 3, 2)$.

2. Sia $\vec{F}$ il campo di vettori

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{r^3}\,\vec{r}$$

dove $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ è il vettore posizione e $r = \|r\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ è la sua lunghezza.

Dire qual è il campo di definizione D di $\vec{F}$ e dire se D è semplicemente connesso.

Dimostrare che $\vec{F}$ è conservativo trovandone anche un potenziale.

3. Data la sfera $S = \{x^2+y^2+z^2 = r^2\}$ determinare il volume di S compreso tra i due piani

$$z = r/2 \quad \text{e} \quad z = -r/2.$$

4. Sia data una molecola A, A, A, B con 3 atomi A a formare un triangolo equilatero e 1 atomo B posto sull'asse passante per il centro del triangolo e ortogonale al piano Π del triangolo, a distanza > 0 dal piano Π.

(a) Descrivere geometricamente le operazioni di simmetria del gruppo C_{3v} della molecola.

(b) Determinare il carattere della rappresentazione totale Γ del gruppo di C_{3v} completando la tabella (I) allegata;

(c) Decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I)).

==============================

Il gruppo $\mathcal{C}_{3v}$ ha 6 elementi $E,\ 2C_3,\ 3\sigma_v$ e ha 3 rappresentazioni irriducibili $(A_1,\ A_2,\ B)$ con tavola dei caratteri

	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
θ	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$2cos(\theta) \pm 1$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
u_n	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\chi(R)$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

(I)

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale si determina considerando, per ogni elemento del gruppo, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando $(u_n) * (2cos(\theta) \pm 1)$ secondo che l'elemento sia una rotazione propria o impropria di angolo θ.

Γ_i	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
B	2	-1	0