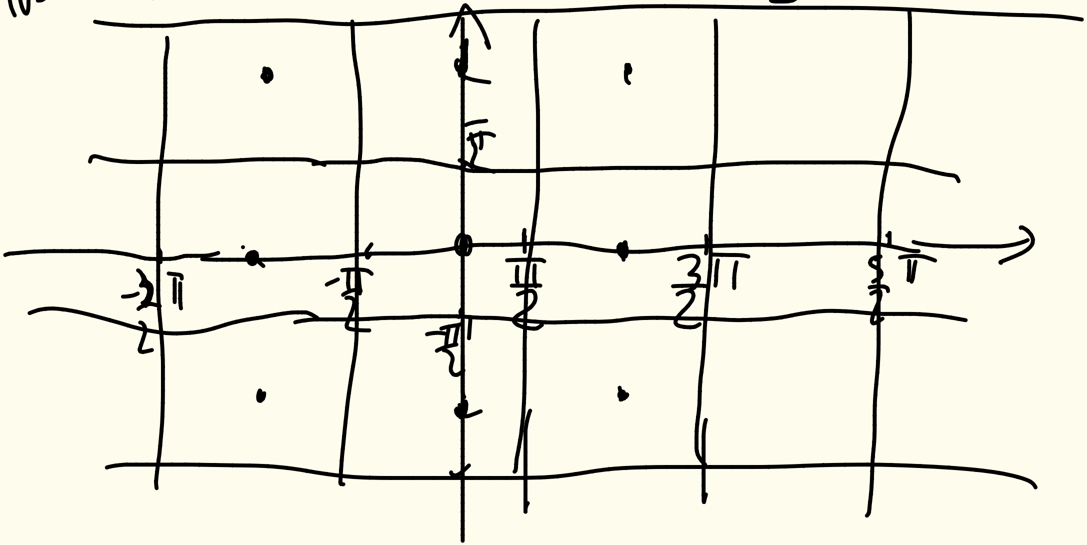
Soluzione compito
5/6/2019

1) $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$



$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2 x \cos y} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\operatorname{sen}(y)}{\cos x \cos^2 y} = 0 \end{cases} \quad \text{se} \quad \begin{cases} x = k\pi \\ y = h\pi \end{cases} \quad k, h \in \mathbb{Z}$$

Per la periodicità di f, basta studiare i 4 punti critici con $k, h \in \{0, 1\}$.

$P_{00} = (0,0)$, $P_{1,0} = (\pi, 0)$, $P_{01} = (0, \pi)$, $P_{11} = (\pi, \pi)$.

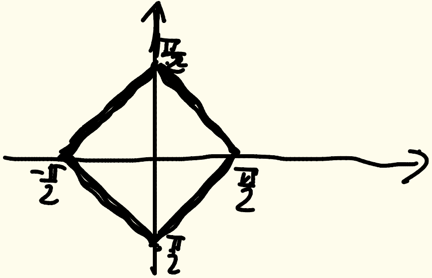
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x \cos y} = \begin{cases} 1 & \text{in } P_{00} \text{ e in } P_{11} \\ -1 & \text{in } P_{10} \text{ e in } P_{01} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1 + \sin^2(y)}{\cos x \cos^3(y)} = \begin{cases} 1 & \text{in } P_{00} \text{ e } P_{11} \\ -1 & \text{in } P_{10} \text{ e } P_{01} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\sin(x) \sin(y)}{\cos^2(x) \cos^2(y)} = 0 \quad \text{in tutti i punti critici.}$$

Quindi H è definita positiva in P_{00} e P_{11}, è definita negativa in P_{10} e P_{01}. Quindi P_{00}, P_{11} minimi (relativi), P_{10}, P_{01} max (relativi).

2)

$Q =$ 

Nel primo quadrante: $x+y=\frac{\pi}{2}$, $x\geq 0, y\geq 0$, si deve studiare la funzione

$$g(x) = \frac{1}{\cos x \cos(\frac{\pi}{2}-x)} = \frac{1}{\cos x \operatorname{sen}(x)} = \frac{2}{\operatorname{sen}(2x)},$$

che tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$ o $x \to \frac{\pi}{2}^-$.

$$g'(x) = \frac{4\cos 2x}{\operatorname{sen}(2x)^2} = 0$$ per $2x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$, dove la g ha minimo.

Gli altri lati si descrivono come: $x-y=\frac{\pi}{2}$, $x\geq 0, y\leq 0$;

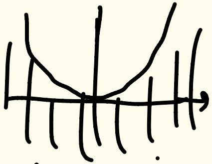
$-x+y=\frac{\pi}{2}$, $x\leq 0$, $y\geq 0$;

$-x-y=\frac{\pi}{2}$, $x\leq 0$, $y\leq 0$.

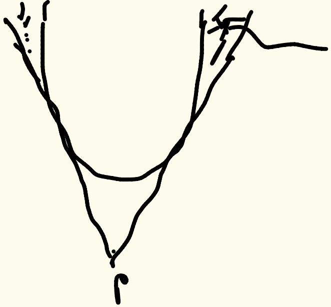
Siccome il cos è pari, i valori di $f(x,y)$ su questi lati corrispondono a quelli di f sul primo lato, per cui si hanno 4 minimi nei punti $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$

---

3) Dominio di f: $x^2 - y \geq 0 \iff y \leq x^2$ che è la parte ombreggiata sotto la



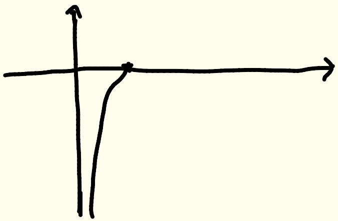
parabola. Tale dominio NON è stellato: infatti da ogni punto P del dominio posso tracciare 2 tangenti alla parabola: i punti fra la tangente e la parabola "dietro" al punto di tangenza non sono visti da P:



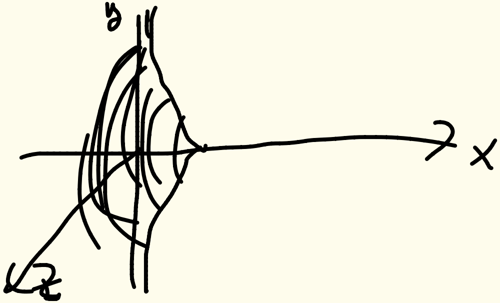
la funzione $f(x,y) = \frac{1}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}$ è un potenziale di $\vec{F}$.

---

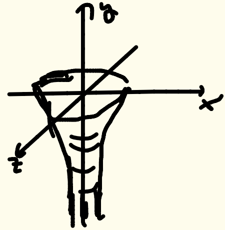
4)



$C_x = \{(x,y,z) \mid 0 < x \leq 1,\ \sqrt{y^2+z^2} \leq \log x^{\alpha} = \alpha \log x\}$



$$C_y = \{(x,y,z) \mid -\infty < y \leq 0,\ \sqrt{x^2+z^2} \leq e^{\frac{y}{\alpha}}\}$$



Per una nota formula si ha:

$$Vol\ C_x = \pi \int_0^1 \alpha^2 \log^2(x)\, dx = \pi\alpha^2 \left[x\log^2(x) - 2x\log(x) + 2x\right]_0^1 =$$

$$2\pi\alpha^2 - \pi\alpha^2 \lim_{x\to 0}\left(x\log^2(x) - 2x\log(x) + 2x\right) = 2\pi\alpha^2$$

$$Vol\ C_y = \pi \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{2y}{\alpha}}\, dy = \pi\left[\frac{\alpha}{2} e^{\frac{2y}{\alpha}}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{\pi\alpha}{2}$$

$$Vol\ C_x = Vol\ C_y \iff 2\pi\alpha^2 = \frac{\pi}{2}\alpha \iff \alpha(4\alpha-1) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

---

5) i) Resta calcolare la distanza tra i punti A_1, A_2, A_3:

$\|A_1A_2\| = \|(2,-2,0)\| = 2\sqrt{2}$

$\|A_1A_3\| = \|(2,0,-2)\| = 2\sqrt{2}$

$\|A_2A_3\| = \|(0,2,-2)\| = 2\sqrt{2}$

I tre punti stanno nel piano $x+y+z=1$, e il baricentro ha coordinate: $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Quindi la retta ortogonale al triangolo e passante per il baricentro ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}+t \\ y = \frac{1}{3}+t \\ z = \frac{1}{3}+t \end{cases}$$

e contiene B (basta mettere $t=\frac{2}{3}$).

	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
θ	0	$\frac{2\pi}{3}$	0
$\cos(\theta)$	3	0	1
u_n	4	1	2
χ	12	0	2

$a_1 = \frac{1}{6}(12+3\cdot 2) = 3$

$a_2 = \frac{1}{6}(12-3\cdot 2) = 1$

$a_3 = \frac{1}{6}(24) = 4$