Breve soluzione compito 15/7/2019

1) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + \alpha^2 y^2 - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = y^2 + 2\alpha^2 x y = 0 \quad = y(y + 2\alpha^2 x) \end{cases}$ quindi

$\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$ oppure $y = -2\alpha^2 x$ che dà $x^2(1+4\alpha^6) = 1$ cioè:

$$\begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+4\alpha^6}} \\ y = \mp \frac{2\alpha^2}{\sqrt{1+4\alpha}} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2\alpha^2 y \qquad \text{da cui} \quad H = \begin{bmatrix} 2x & 2\alpha^2 y \\ 2\alpha^2 y & 2\alpha^2 x + 2y \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2y + 2\alpha^2 x$$

$$H_{(1,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 \end{bmatrix}$$ minimo relativo se $\alpha \neq 0$

$$H_{(-1,0)} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2\alpha^2 \end{bmatrix}$$ massimo relativo se $\alpha \neq 0$

$$H\left(\frac{1}{\sqrt{1+4\alpha^6}}, -\frac{2\alpha^2}{\sqrt{1+4\alpha^6}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{\cdots}} & \frac{-4\alpha^4}{\sqrt{}} \\ \frac{-4\alpha^4}{\sqrt{}} & \frac{-2\alpha^2}{\sqrt{}} \end{bmatrix}$$ $\det < 0$ se $\alpha \neq 0 \Rightarrow$ sella

$$H\left(-\frac{1}{\sqrt{1+4\alpha^6}}, \frac{2\alpha^2}{\sqrt{1+4\alpha^6}}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{\cdots}} & \frac{-4\alpha^4}{\sqrt{}} \\ \frac{-4\alpha^4}{\sqrt{}} & \frac{2\alpha^2}{\sqrt{}} \end{bmatrix}$$ $\det < 0$ se $\alpha \neq 0 \Rightarrow$ sella

Se $\alpha = 0$ $\quad f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - x$ $\quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - 1 = 0 & \text{se } x = \pm 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = y^2 = 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$

L'Hessiana è degenere in $(\pm 1, 0)$,
ma chiaramente in tali punti il grafico attraversa il piano tangente, quindi sono punti di sella.

---

2) Con Lagrange: $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(x^2 + \alpha^2 y^2 - 1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = x^2 + \alpha^2 y^2 - 1 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = y^2 + 2\alpha^2 xy + 2\lambda \alpha^2 y = 0 \equiv y(y + 2\alpha^2 x + 2\lambda\alpha^2) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^2 + \alpha^2 y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Essendo $g = \frac{\partial f}{\partial x}$ è chiaro che i punti critici di f risolvono il sistema (con $\lambda = 0$):

$A=(1,0)$, $B=(-1,0)$, $C=\left(\frac{1}{\sqrt{1+4\alpha^6}}, -\frac{2\alpha^2}{\sqrt{1+4\alpha^6}}\right)$, $D=\left(-\frac{1}{\sqrt{1+4\alpha^6}}, \frac{2\alpha^2}{\sqrt{1+4\alpha^6}}\right)$

Se $\alpha \neq 0$ questi sono 4 punti distinti.

Dalle 1ª e 3ª equazioni, si può avere anche $x=0$, che dà (se $\alpha \neq 0$) $y = \pm\frac{1}{|\alpha|}$, $\lambda = \mp \frac{1}{2|\alpha|^3}$.

Si ha:

$$f(A) = -\frac{2}{3}, \quad f(B) = \frac{2}{3}, \quad f(C) = \frac{1}{\left(\sqrt{1+4\alpha^6}\right)^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{8\alpha^6}{3} + 4\alpha^6\right) - \frac{1}{\sqrt{1+4\alpha^6}} =$$

$$= \frac{1+4\alpha^6}{3\left(\sqrt{1+4\alpha^6}\right)^3} - \frac{1}{\sqrt{1+4\alpha^6}} = -\frac{2}{3\sqrt{1+4\alpha^6}};$$

$$f(D) = \frac{1}{\left(\sqrt{\quad}\right)^3}\left(-\frac{1}{3} + \frac{8\alpha^6}{3} - 4\alpha^6\right) + \frac{1}{\sqrt{\quad}} = \frac{2}{3\sqrt{1+4\alpha^6}}$$

In $E=\left(0,\frac{1}{|\alpha|}\right)$ si ha $f(E)=\frac{1}{3|\alpha|^3}$

in $F=\left(0,-\frac{1}{|\alpha|}\right)$ si ha $f(F)=-\frac{1}{3|\alpha|^3}$

si ha $-\frac{2}{3}=f(A)<f(C)<f(D)<f(B)=\frac{2}{3}$

e $\frac{1}{3|\alpha|^3}>\frac{2}{3}$ $\left(\text{e } -\frac{1}{3|\alpha|^3}<-\frac{2}{3}\right)$ per $\frac{1}{|\alpha|^3}>2$ cioè $0<|\alpha|<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

In conclusione, se $\alpha\neq 0$:

per $0<|\alpha|<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ E è massimo assoluto, F è minimo assoluto;

per $|\alpha|>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ A è minimo assoluto, B è massimo assoluto per $|\alpha| = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ A ed F sono min. assoluti, B e E sono non. assoluti;

Per $\alpha = 0$ il vincolo è dato dall'unione di due rette: $x = 1$, $x = -1$

Per $x = 1$ $\quad f = \frac{y^3}{3} + \alpha^2 y^2 - \frac{2}{3} \xrightarrow[y \to \pm\infty]{} \pm\infty$

per $x = -1$ $\quad f = \frac{y^3}{3} - \alpha^2 y^2 + \frac{2}{3} \xrightarrow[y \to \pm\infty]{} \pm\infty$

e quindi non ci sono estremi vincolati.

---

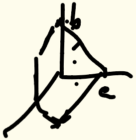
3) $\mathcal{L} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^{2\pi} \left[-\mathrm{sen}(t)(-\mathrm{sen}(t)) + \cos(t)\cos(t) + (1+t) \right] dt =$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\cos^2 t + \sin^2 t + 1 + t\right] dt = \int_0^{2\pi} (2+t)\, dt = \left[2t + \frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 4\pi + 2\pi^2$$

Poiché $\frac{\partial F_1}{\partial y} = -1 \neq \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1$ $\vec{F}$ non è conservativo.

Basta prendere $\vec{G} = 2y\,\vec{i}$: $\vec{F}+\vec{G}$ è definito su tutto $\mathbb{R}^3$ che è semplicemente connesso

---

4)  Osserviamo che K è un cono di raggio di base b e altezza a, e K' è un cono di raggio di base a e altezza b.

Quindi $\mathrm{Vol}(K) = \frac{\pi b^2 a}{3}$, $\mathrm{Vol}(K') = \frac{\pi a^2 b}{3}$ e questi sono uguali solo quando $a = b$.

Chiaramente il baricentro sta sull'asse del cono, quindi basta calcolare una coordinata:

$$\left(G_K\right)_x = \frac{1}{\mathrm{Vol}\,K} \cdot \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a x\,dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \rho\, d\rho = \quad \left(\begin{array}{c}\text{in coordinate} \\ \text{cilindriche } \rho, \vartheta, x\end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Vol}\,K}\; 2\pi \int_0^a x\, \frac{b^2}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx = \frac{\pi b^2}{\mathrm{Vol}\,K \cdot a^2}\int_0^a x\,(a-x)^2\,dx = \frac{\pi b^2}{\mathrm{Vol}\,K\cdot a^2}\left[a^2\frac{x^2}{2} - 2a\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^a =$$

$$= \frac{\pi a^2 b^2\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right]}{\mathrm{Vol}(K)} = \frac{\frac{\pi a^2 b^2}{12}}{\frac{\pi a b^2}{3}} = \frac{a}{4}$$

Quindi $G_K \equiv \left(\frac{a}{4}, 0, 0\right)$. Analogamente $G_{K'} \equiv \left(0, \frac{b}{4}, 0\right)$.

I vettori $\overrightarrow{G_K G_{K'}} \equiv \left(-\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, 0\right)$ e $\overrightarrow{PQ} \equiv (-a, b, 0)$

sono multipli, quindi i due segmenti sono paralleli.

5) a)

	E	C_2^z	C_2^y	C_2^x	i	iC_2^z	iC_2^y	iC_2^x
$\chi(R) =$	18	-2	-2	-2	0	4	4	4

$a_1 = \frac{1}{8}\, 24 = 3$; $a_2 = \frac{1}{8} \cdot 0 = 0$

$a_3 = \frac{1}{8} \cdot 16 = 2$; $a_4 = \frac{1}{8} \cdot 24 = 3$

$a_5 = \frac{1}{8} \cdot 16 = 2$; $a_6 = \frac{1}{8} \cdot 24 = 3$

$a_7 = \frac{1}{8} \cdot 16 = 2$; $a_8 = \frac{1}{8} \cdot 24 = 3$

b)

	E	C_2^z	C_2^y	C_2^x	i	iC_2^z	iC_2^y	iC_2^x
u_R	$2(m+n+p)$	$2p$	$2n$	$2m$	0	$2(m+n)$	$2(m+p)$	$2(n+p)$
$\chi(R)$	$6(m+n+p)$	$-2p$	$-2n$	$-2m$	0	$2(m+n)$	$2(m+p)$	$2(n+p)$

Allora

$$a_1 = \frac{1}{8}(6-2+4)(m+n+p) = m+n+p$$

$$a_2 = \frac{1}{8}(6-2-4)(m+n+p) = 0$$

$$a_3 = \frac{1}{8}(6m+6n+6p-2p+2n+2m+2m+2n-2m-2p-2n-2p) = \frac{1}{8}(8m+8n) = m+n$$

$$a_4 = \frac{1}{8}(6m+6n+6p-2p+2n+2m-2m-2n+2m+2p+2n+2p) = \frac{1}{8}(8m+8n+8p) = m+n+p$$

$$a_5 = \frac{1}{8}(6m+6n+6p+2p-2n+2m-2m-2n+2m+2p-2n-2p) = \frac{1}{8}(8m+8p) = m+p$$

$$a_6 = \frac{1}{8}\left(6m+6n+6p+2p-2n+2m+2m+2n-2m-2p+2n+2p\right) = \frac{1}{8}\left(8m+8n+8p\right) = m+n+p$$

$$a_7 = \frac{1}{8}\left(6m+6n+6p+2p+2n-2m-2m-2n-2m-2p+2n+2p\right) = \frac{1}{8}\left(8n+8p\right) = n+p$$

$$a_8 = \frac{1}{8}\left(6m+6n+6p+2p+2n-2m+2m+2n+2m+2p-2n-2p\right) = \frac{1}{8}\left(8m+8n+8p\right) = m+n+p$$

Se si conoscono $x = m+n$, $y = m+p$, $z = n+p$ allora

$$m = \frac{1}{2}(x+y-z), \quad n = \frac{1}{2}(x-y+z), \quad p = \frac{1}{2}(-x+y+z)$$