1) $f(x,y) = (x^2+y^2)\, e^{x+2y}$ (I PARTE)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = (2x + x^2+y^2)\, e^{x+2y} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = (2y + 2x^2+2y^2)\, e^{x+2y} = 2\,(x^2+y^2+y)\, e^{x+2y} = 0 \end{cases}$$

equivale a $\begin{cases} x^2+y^2+2x = 0 \\ x^2+y^2+y = 0 \end{cases}$ che dà, facendo le differenze:

$y = 2x$, quindi $x^2+4x^2+2x = 5x^2+2x = 0$

$x(5x+2) = 0$, quindi

$$A = \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad B = \begin{cases} x = -\dfrac{2}{5} \\[2mm] y = -\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

In $A = (0,0)$ lo sviluppo di Taylor dà:

$$(x^2+y^2)\left(1 + x+2y + \frac{1}{2!}(x+2y)^2 + \cdots\right) =$$

$$= x^2+y^2 + O(3)$$ quindi A è un minimo.

In B:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (x^2+y^2+4x+2)\, e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2(x^2+y^2+y+2x)\, e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\left(2x^2+2y^2+4y+1\right) e^{x+2y}$$

Calcolando in B e trascurando il coefficiente positivo

$e^{-\frac{2}{5}-\frac{8}{5}} = e^{-2}$ si trova:

$$H(B) = e^{-2}\begin{bmatrix} 6/5 & -8/5 \\ -8/5 & -\frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

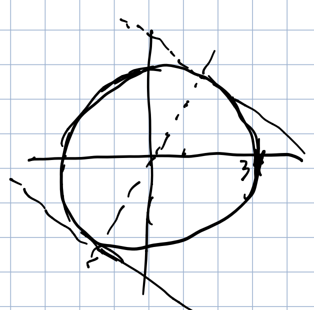
$\det H(B) < 0$ quindi B è una sella.

---

2) $x^2+y^2=9$ Quindi sul vincolo risulta

$$f(x,y) = 9\, e^{x+2y}$$

e basta estremizzare $\varphi(x,y) = x+2y$ sul vincolo.



$$L = \varphi + \lambda\, g = x+2y+\lambda(x^2+y^2-9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1+2\lambda x = 0 & 2x = -\frac{2}{2\lambda} \quad (\lambda \neq 0) \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2+2\lambda y = 0 & y = -\frac{2}{2\lambda} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2+y^2-9 = 0 & y = 2x \end{cases}$$

$$x^2+4x^2-9=0$$

$\lambda = 0$ non dà soluzioni

$$5x^2 = 9 \qquad \begin{cases} x = \pm \dfrac{3}{\sqrt{5}} \\ y = \pm \dfrac{6}{\sqrt{5}} \end{cases} \qquad \varphi\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}}\right) > \varphi\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}}\right)$$

quindi

$\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$ è massimo vincolato

$\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}}\right)$ è minimo vincolato

---

3) $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$ non è semplicemente connesso (fatto a lezione).

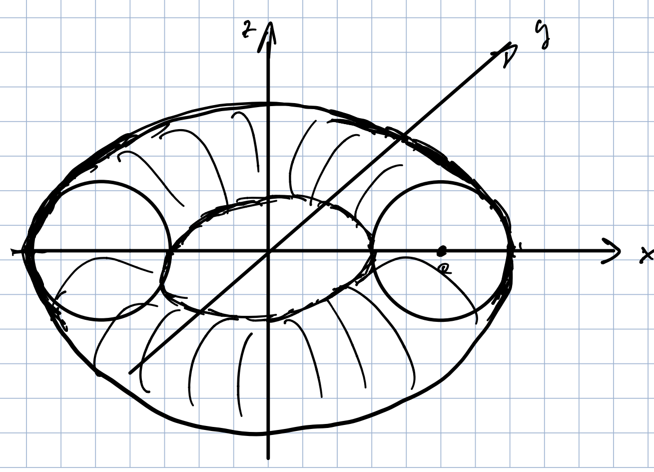
$$L = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + (\cos t)(\cos t) \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi$$

Ne segue che f non è conservativo perché abbiamo trovato che il lavoro lungo la circonferenza (che è una linea chiusa) non è 0.

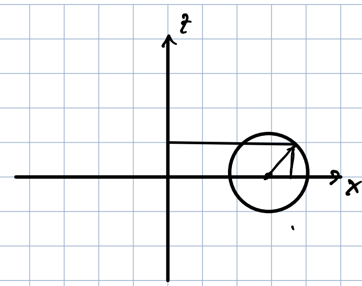
(II PARTE)

1 (a)



è un "toro".

Nel piano xz si ha:



$$(x-a)^2+z^2 \le r^2$$

, quindi in coordinate cilindriche:

$$T_{a,r} = \{(\rho,\theta,z) \mid (\rho-a)^2+z^2 \le r^2\}$$

(b)

$$\mathrm{Vol}\, T_{a,r} = \iiint_{T_{a,r}} 1 \cdot dV =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-r}^{r} dz \int_{-\sqrt{r^2-z^2}+a}^{+\sqrt{r^2-z^2}+a} \rho \, d\rho =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} dz \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{-\sqrt{r^2-z^2}+a}^{\sqrt{r^2-z^2}+a} = \pi \int_{-r}^{r} 4a\sqrt{r^2-z^2}\, dz =$$

$z = r \operatorname{sen} t$

$dz = r \cos t \, dt$

$$= 4\pi a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\; r\cos t \, dt =$$

$$= 4\pi a r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt =$$

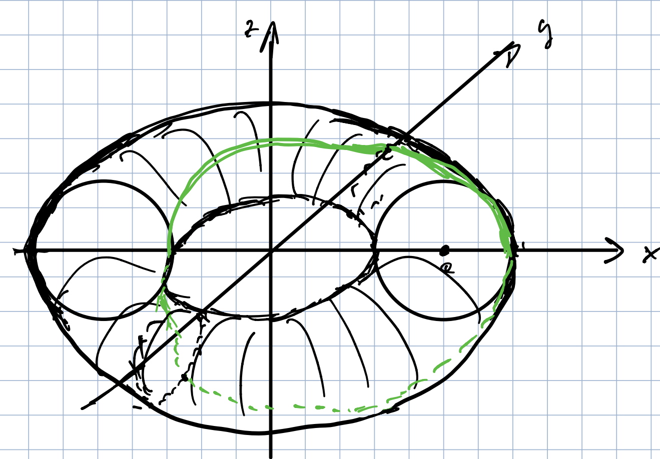
$\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$

$$= 4\pi a r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t \, dt = 4\pi a r^2 \left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\left[\operatorname{sen} 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= 2\pi^2 a r^2 = 2\pi a \cdot \pi r^2$$

(c)

(i)



La curva fa un giro completo attorno alla circonferenza "rotante" in corrispondenza di un giro $0 \le \theta \le 2\pi$ attorno all'asse z.

(ii)

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = \rho \cos\theta = (a + r\cos\theta)\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta = (a + r\cos\theta)\operatorname{sen}\theta \\ z = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

in generale: $\begin{cases} \rho = \varphi(\theta) \\ z = \psi(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\theta = \varphi(\theta)\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta = \varphi(\theta)\operatorname{sen}\theta \\ z = \psi(\theta) \end{cases}$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} x'(\theta) = \varphi'(\theta)\cos\theta - \varphi(\theta)\operatorname{sen}\theta \\ y'(\theta) = \varphi'(\theta)\operatorname{sen}\theta + \varphi(\theta)\cos\theta \\ z'(\theta) = \psi'(\theta) \end{cases}$$

$$\left\|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right\|^2 = (\varphi')^2\cos^2\theta - \cancel{2\varphi\varphi'\cos\theta\operatorname{sen}\theta} + \varphi^2\operatorname{sen}^2\theta + (\varphi')^2\operatorname{sen}^2\theta + \cancel{2\varphi\varphi'\cos\theta\operatorname{sen}\theta} + \varphi^2\cos^2\theta + (\psi')^2 =$$

$$= (\varphi')^2 + \varphi^2 + (\psi')^2$$

Quindi nel caso in questione:

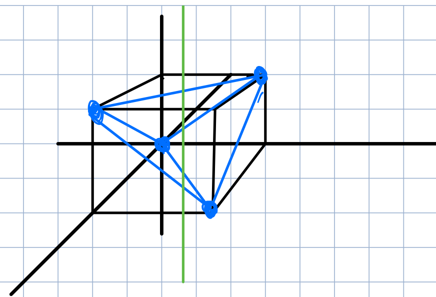
$$\left\|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right\|^2 = (a + r\cos\theta)^2 + r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta = (a + r\cos\theta)^2 + r^2 .$$

Quindi

$$\ell(C) = \int_0^{2\pi} \left\|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right\| d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a + r\cos\theta)^2 + r^2}\, d\theta =$$

$= \dots$

2 (a).



L'asse di rotazione (in rosso) passa per le metà di due lati "opposti", cioè che congiungono coppie di vertici disgiunte. Nel caso nel disegno $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$.

Il piano di simmetria è ortogonale all'asse e passa per il baricentro, quindi nel caso del disegno l'equazione è: $z=\frac{1}{2}$.

(b) e (c).

	E	$8C_3$	$3C_2$	$6\sigma_d$	$6S_4$
θ	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	0	$\frac{\pi}{2}$
$2\cos\theta \pm 1$	3	0	-1	1	-1
u_n	4	1	0	2	0
$\chi(R)$	12	0	0	2	0

$$a_1 = \frac{1}{24}\left(12 + 6 \cdot 2 \cdot 1\right) = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{24}\left(12 - 6 \cdot 2\right) = 0$$

$$b = \frac{1}{24}\left(24 + 0\right) = 1$$

$$f_1 = \frac{1}{24}\left(36 + 6 \cdot 2\right) = 2$$

$$f_2 = \frac{1}{24}\left(36 - 6 \cdot 2\right) = 1$$

$$\Gamma = A_1 + B + 2F_1 + F_2$$

(d) (i)

	E	$8C_3$	$3C_2$	$6\sigma_d$	$6S_4$
χ_Γ	4	1	0	2	0

$$a_1 = \frac{1}{24}\left(4 + 8 + 6\cdot 2\right) = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{24}\left(4 + 8 - 6\cdot 2\right) = 0$$

$$b = \frac{1}{24}\left(8 - 8 + 0 + 0 + 0\right) = 0$$

$$f_1 = \frac{1}{24}\left(12 + 0 + 0 + 6\cdot 2 + 0\right) = 1$$

$$f_2 = \frac{1}{24}\left(12 + 0 + 0 - 6\cdot 2 + 0\right) = 0$$

$$\Gamma = A_1 + F_1$$

[facoltativo] $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$T = \frac{1}{2}\,\dot{\underline{x}}^T \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \dot{\underline{x}} \quad , \quad V = \frac{1}{2}\,\underline{x}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}$$

Intanto poniamo $\xi_1 = \sqrt{m_1}\, x_1$, $\xi_2 = \sqrt{m_2}\, x_2$ che dà (posto $\underline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$)

$$T = \frac{1}{2}\,\dot{\underline{\xi}}^T I\, \dot{\underline{\xi}} \qquad V = \frac{1}{2}\,\underline{\xi}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{m_1} & -\frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}} & \frac{2}{m_2} \end{bmatrix}}_{=B} \underline{\xi}$$

Adesso troviamo autovalori e autovettori della matrice B:

$$\lambda^2 - 2\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right)\lambda + \frac{3}{m_1 m_2} = 0$$

$$\lambda = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right)^2 - \frac{3}{m_1 m_2}} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \pm \frac{1}{m_1 m_2}\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 - 3m_1 m_2} =$$

$$= \frac{1}{m_1 m_2}\left(m_1+m_2 \pm \sqrt{m_1^2+m_2^2-m_1 m_2} \right) = \lambda_{1,2}$$

Un autovettore relativo a λ_1 sarà soluzione di

$$\left(\frac{2}{m_1}-\lambda_1\right)\eta_1 - \frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}}\eta_2 = 0$$ cioè gli autovettori sono tutti multipli di:

$$\underline{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}}, \frac{2}{m_1}-\lambda_1\right)$$ con $$\frac{2}{m_1}-\lambda_1 = \frac{1}{m_1 m_2}\left(2m_2 - m_1 - m_2 - \sqrt{m_1^2+m_2^2-m_1 m_2}\right) = \frac{1}{m_1 m_2}\left(m_2 - m_1 - \sqrt{m_1^2+m_2^2-m_1 m_2}\right)$$

Quindi $$\underline{v}_1 = \frac{1}{m_1 m_2}\left(\sqrt{m_1 m_2}, m_2 - m_1 - \sqrt{m_1^2+m_2^2-m_1 m_2}\right)$$

Per λ_2, gli autovettori sono i multipli di: $\underline{v}_2 = \left(\frac{2}{m_2}-\lambda_2, \frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}}\right)$ e

$$\frac{2}{m_2}-\lambda_2 = \frac{1}{m_1 m_2}\left(2m_1 - m_1 - m_2 + \sqrt{m_1^2+m_2^2-m_1 m_2}\right) = \frac{1}{m_1 m_2}\left(m_1 - m_2 + \sqrt{m_1^2+m_2^2-m_1 m_2}\right)$$

cioè $$\underline{v}_2 = \frac{1}{m_1 m_2}\left(m_1 - m_2 + \sqrt{m_1^2+m_2^2-m_1 m_2}, \sqrt{m_1 m_2}\right)$$

Allora le coordinate normali Q_1, Q_2 sono date da

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1/\|\underline{v}_1\| \\ \hline \underline{v}_2/\|\underline{v}_2\| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1/\|\underline{v}_1\| \\ \underline{v}_2/\|\underline{v}_2\| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{m_1}\, x_1 \\ \sqrt{m_2}\, x_2 \end{bmatrix}$$

ad es. se $m_1 = m_2 = m$ $\quad \underline{v}_1 = \left(\frac{1}{m}, -\frac{1}{m}\right)$, $\underline{v}_2 = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right)$

e $\|\underline{v}_1\| = \|\underline{v}_2\| = \frac{\sqrt{2}}{m}$ per cui $$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{m_1}\, x_1 \\ \sqrt{m_2}\, x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{m_1}{2}}\, x_1 - \sqrt{\frac{m_2}{2}}\, x_2 \\ \sqrt{\frac{m_1}{2}}\, x_1 + \sqrt{\frac{m_2}{2}}\, x_2 \end{bmatrix}$$