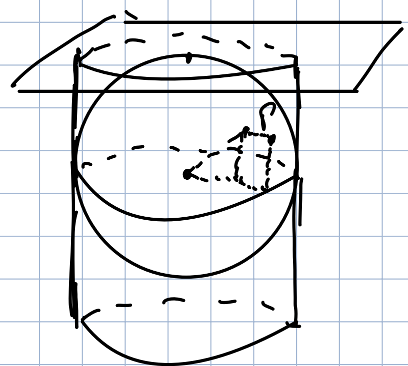
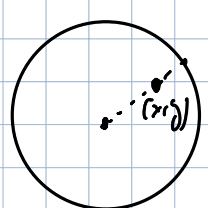
1. $d(x,y,z) = \left|\sqrt{x^2+y^2+z^2} - 1\right|$

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right|} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1} & \text{se } x^2+y^2+z^2 > 1 \\ \dfrac{1}{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{se } x^2+y^2+z^2 < 1 \end{cases}$$

Nessun punto $P \equiv (x,y,z)$ diverso dall'origine $O \equiv (0,0,0)$ è punto critico: infatti lungo la direzione radiale $\overrightarrow{OP}$ la distanza d è strettamente crescente se $x^2+y^2+z^2>1$ (e quindi f è strettamente decrescente) ed è strettamente decrescente se $x^2+y^2+z^2<1$ (quindi f è strettamente crescente). Quindi la derivata direzionale di f lungo $\overrightarrow{OP}$ è non nulla.
L'unico punto critico è quindi l'origine O dove ovviamente f ha un minimo.

2. 

Sia $P \equiv (x,y,z) \in S$
La distanza di P dal piano $z=1$ è ovviamente $1-z$; la distanza di P dal cilindro è la stessa distanza che c'è tra il punto (x,y) e la circonferenza $x^2+y^2=1$ (v. figura)



che è data da $1-\sqrt{x^2+y^2}$.
Quindi la funzione da minimizzare è

$$f(x,y,z) = 1-z+1-\sqrt{x^2+y^2} = 2-z-\sqrt{x^2+y^2}$$

$$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$$

$$L(x,y,z,\lambda) = 2 - z - \sqrt{x^2+y^2} + \lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = -1 + 2\lambda z = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2+y^2+z^2-1 = 0 \end{cases}$$

Moltiplicando le prime 2 per z e usando la terza si ha:

$$-\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x\left(1 - \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

$$-\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y\left(1 - \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

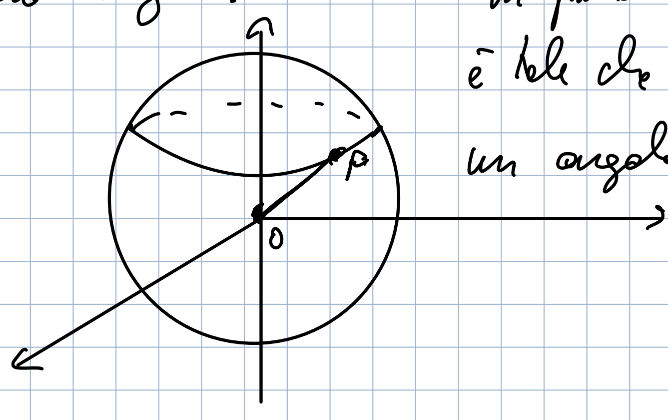
e da $\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1 \Rightarrow z = \sqrt{x^2+y^2}$ (quindi $z \geq 0$)

dall'equazione del vincolo: $z^2 = 1 - z^2 \Rightarrow 2z^2 = 1 \Rightarrow z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

e $\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. In questi punti f vale

$$2 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2} \quad (< 1)$$

e i punti costituiscono una circonferenza contenuta nella sfera, parallela al piano xy:



un punto P di questa circonferenza è tale che il vettore $\overrightarrow{OP}$ fa un angolo di $45°$ col piano xy.

3.

a. Il dominio è evidentemente $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\} \cup \{(-1,0)\}$ (piano con 2 buchi) e non è semplicemente connesso: una circonferenza che avvolge 1 o 2 dei due punti non può contrarsi a un punto all'interno del dominio.

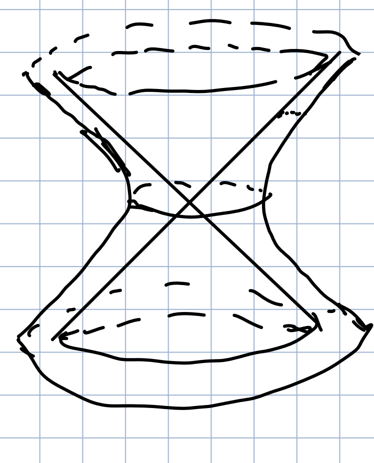
b. Il campo è conservativo con potenziale

$$f(x,y) = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

c. Il piano $z=k$ interseca il cono nelle circonferenze $x^2+y^2=k^2$ di raggio k, e interseca l'iperboloide nelle circonferenze $x^2+y^2=k^2+1$ di raggio $\sqrt{k^2+1}$.

Quindi la corona circolare ha area: $\pi(k^2+1) - \pi k^2 = \pi$.

Utilizzando ad es. coordinate cilindriche ρ, θ, z, il volume compreso tra il cono e il cilindro, e compreso tra $z=0$ e $z=k$ è dato da:



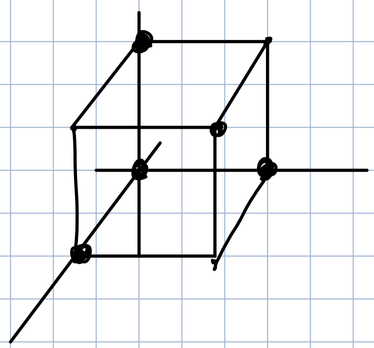
$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k dz \int_z^{\sqrt{z^2+1}} \rho \, d\rho =$$

$$\int_0^k \left(2\pi \int_z^{\sqrt{z^2+1}} \rho \, d\rho \right) dz =$$

$$= \int_0^k (\text{Area corona circolare}) \, dz = \pi \int_0^k dz = \pi k$$

che tende a ∞ per $k \to \infty$.

5.



e) basta prendere:

$(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$.

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
θ	0	$\frac{2\pi}{3}$	0
$2\cos\theta \pm 1$	3	0	1
u_n	5	2	3
χ	15	0	3

$$a_1 = \frac{1}{6}\left(15 + 3 \cdot 3\right) = 4$$

$$a_2 = \frac{1}{6}\left(15 - 3 \cdot 3\right) = 1$$

$$a_3 = \frac{1}{6}\left(30\right) = 5$$

$$\Gamma = 4A_1 + A_2 + 5B$$