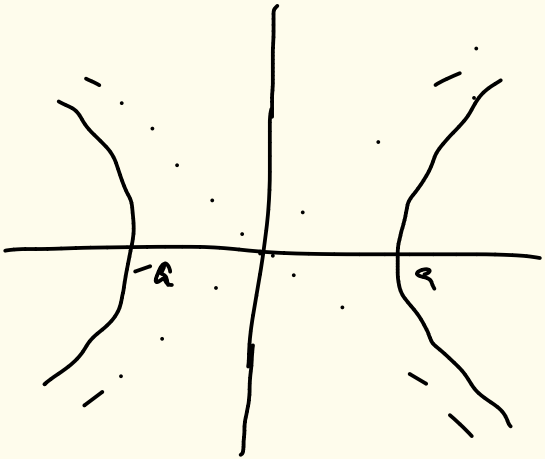
1) $f(x,y) = \frac{x^3}{3a^2} - \frac{xy^2}{a^2} - x + \frac{y^3}{3a^4}$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^2}{a^4} - \frac{2xy}{a^2} = \\ \quad = \frac{y}{a^4}\left(y - 2a^2 x\right) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm a \end{cases} \qquad y = 2a^2 x \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{4a^4x^2}{a^2} = 1$$

$\Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{1-4a^4}$, risolubile se $4a^4 < 1 \iff$

$a^2 < \frac{1}{2} \iff a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (in ipotesi $a > 0$)

con soluzione $x = \pm \frac{a}{\sqrt{1-4a^4}}$, $y = \pm \frac{2a^3}{\sqrt{1-4a^4}}$

Quindi i punti $(\pm a, 0)$ ci sono sempre, i punti $\pm\left(\frac{a}{\sqrt{1-4a^4}}, \frac{2a^3}{\sqrt{1-4a^4}}\right)$ ci sono se $|a| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2x}{a^2} + \frac{2y}{a^4}$$

$$\det H = \frac{4}{a^6}\left(-a^2x^2 + xy - a^2y^2\right)$$

In $(a,0)$:

$$\det H = \frac{4}{a^6}\left(-a^4\right) = -\frac{4}{a^2} < 0$$ quindi è una sella

Se $a < \frac{1}{\sqrt{2}}$, nel punto $\left(\frac{a}{\sqrt{1-4a^4}}, \frac{2a^3}{\sqrt{1-4a^4}}\right)$ si ha

che $$\det H = \frac{4}{a^6}\left(-a^2\frac{a^2}{1-4a^4} + \frac{2a^4}{1-4a^4} - \frac{a^2\,4a^6}{1-4a^4}\right) =$$

$$= \frac{4}{a^2(1-4a^4)}\left(1-4a^4\right) = \frac{4}{a^2} > 0$$

e $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{a}{\sqrt{1-4a^4}}, \frac{2a^3}{\sqrt{1-4a^4}}\right) > 0$$ quindi minimo

2) $f(x,y,z) = xyz$, $g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$

$$\begin{cases} yz + 2\lambda \frac{x}{a^2} = 0 \\ xz + 2\lambda \frac{y}{b^2} = 0 \\ z + 2\lambda \frac{z}{c^2} = 0 \end{cases}$$

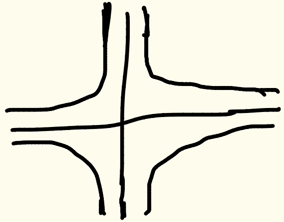
moltiplicando la 1ª per x, la 2ª per y, la 3ª per z:

$$2\lambda \frac{x^2}{a^2} = 2\lambda \frac{y^2}{b^2} = 2\lambda \frac{z^2}{c^2}$$

e sostituendo in g:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{a^2}{3} \\ y^2 = \frac{b^2}{3} \\ z^2 = \frac{c^2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{b}{\sqrt{3}} \\ z = \frac{c}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

3) $|x\,y| < 1 \iff -1 < xy < 1$



$|x\,y\,z| < 1 \iff -1 < xyz < 1$

Sono stellati rispetto all'origine: se $|xyz| < 1$ allora i punti del segmento (tx, ty, tz), $0 \le t \le 1$, verificano $|(tx)(ty)(tz)| = |t^3\, xyz| = t^3\, |xyz| < 1$ poiché $|t| \le 1$.

$\vec{F} = \left(\frac{x\, y^2}{x^2y^2-1} , \frac{x^2 y}{x^2y^2-1} \right)$ è conservativo con potenziale:

$\varphi(x,y) = \log(1-x^2y^2)$ nel dominio D sopra scritto.

Quindi $L = 0$.

Parte II

1) a) $V = \iiint_D dx\,dy\,dz = \iint_{\mathbb{R}^2} dx\,dy \int_0^{e^{-x^2-y^2}} dz = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy =$

$= [\text{vista a lezione}] = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = 2\pi \left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = \pi$

b) $x_G = y_G = 0$ per simmetria.

$z_G = \iiint_D z\,dx\,dy\,dz \Big/ V$

$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \iint_{\mathbb{R}^2} dx\,dy \int_0^{e^{-x^2-y^2}} z\,dz = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-2x^2-2y^2}}{2}\,dx\,dy =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{+\infty} \rho\, e^{-2\rho^2} d\rho = \pi \left[\frac{-e^{-2\rho^2}}{4} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

Quindi $z_G = \frac{1}{4}$

c) $$V_{a,b} = \iiint_{C_{a,b}} dx\,dy\,dz = \iint_{\mathbb{R}^2} dx\,dy \int_0^{e^{-a^2x^2-b^2y^2}} dz =$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-a^2x^2-b^2y^2} dx\,dy = \left(\begin{cases} ax = u \\ by = v \end{cases} \quad J = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \quad \det J = \frac{1}{ab} \right)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2-v^2} \frac{1}{ab}\, du\,dv = \frac{\pi}{ab}$$

2)a) Si calcolano le distanze $\|A_i A_j\|$ e si vede che sono tutte $= 1$.

Ma S_4 è data da una rotazione di $\pm\frac{\pi}{2}$ rispetto a un asse che passa per i punti

medi di due lati opposti, seguita da una riflessione rispetto al piano ortogonale a tale asse che passa dal centro del tetraedro.

Un asse binomio (sono 3) è quello che passa per il punto medio di $A_0 A_1$: $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ e di $A_2 A_3$: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

che ha equazioni parametriche: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} t \\ z = \frac{1}{\sqrt{6}} t \end{cases}$

b)

	E	$8C_3$	$3C_2$	$6\sigma_d$	$6S_4$
θ	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	0	$\pi/2$
$2\cos\theta \pm 1$	3	0	-1	1	-1
u_n	4	1	0	2	0
$\chi(R)$	12	0	0	2	0

c)

$$a_1 = \frac{1}{24}\left(12 + 6\cdot 2\right) = 1$$

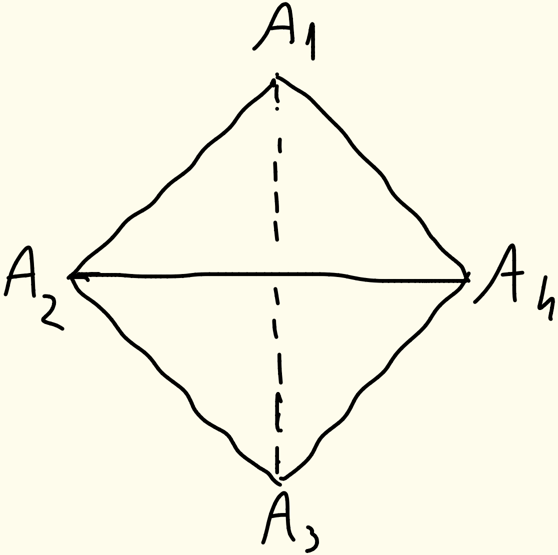
$$a_2 = \frac{1}{24}\left(12 - 6\cdot 2\right) = 0$$

$$a_3 = \frac{1}{24}\left(12\cdot 2 + 0\right) = 1$$

$$a_4 = \frac{1}{24}\left(12\cdot 3 + 6\cdot 2\right) = 2$$

$$a_5 = \frac{1}{24}\left(12\cdot 3 - 6\cdot 2\right) = 1$$

A) Visto "dall'alto" il tetraedro si proietta su un quadrato, come in figura:



Consideriamo allora l'S_4 che ha per asse il punto di mezzo di A_1A_3 e di A_2A_4

(ortogonale al piano del disegno) e le sue potenze:

$$Id = S_4^0 ,\ S_4 ,\ S_4^2 = C_2 ,\ S_4^3$$

Aggiungiamo il σ_d che ha per piano di simmetria quello che passa per $A_2 A_4$ e per le metà di $A_1 A_3$, e l'altro σ'_d che passa per $A_1 A_3$ e per le metà di $A_2 A_4$;

aggiungiamo anche il C_2 che ha per asse il punto di mezzo di $A_1 A_4$ e quello di $A_2 A_3$; e l'altro C'_2 che ha per asse il punto di mezzo di $A_1 A_2$ e quello di $A_3 A_4$.

Gli 8 elementi elencati formano un sottogruppo con 8 elementi, che "corrisponde isomorficamente" al gruppo del quadrato (nel piano).