SOLUZIONE COMPITO e COMPITINO DEL 27/11/2013

---

1) $f_a(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}z^3 + (x-a)(y^2+z^2) - x$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_a}{\partial x} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial f_a}{\partial y} = 2y(x-a) = 0 \\ \dfrac{\partial f_a}{\partial z} = 2z^2 + 2z(x-a) = 2z(x+z-a) = 0 \end{cases}$$

Dalla 2^a: se $y=0$. Se anche $z=0$ allora $x^2=1$

quindi $P_1 \equiv (1,0,0)$, $P_2 \equiv (-1,0,0)$ punti critici.

Se $z \neq 0$, $\begin{cases} z = a - x \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ allora $2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2(a^2-1)}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2}$$

se $|a| < \sqrt{2}$ due soluzioni:

$P_3 \equiv \left(\frac{a + \sqrt{2-a^2}}{2}, 0, \frac{a - \sqrt{2-a^2}}{2} \right)$, $P_4 \equiv \left(\frac{a - \sqrt{2-a^2}}{2}, 0, \frac{a + \sqrt{2-a^2}}{2} \right)$

che coincidono per $|a| = \sqrt{2}$:

$$P_3 = P_4 \equiv \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2} \right) \begin{cases} \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) & \text{se } a = \sqrt{2} \\ \equiv \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) & \text{se } a = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Se $y \neq 0$, $x = a$: dalla 3^a $z = 0$

e dalla 1^a $a^2 + y^2 = 1$, $y = \pm \sqrt{1 - a^2}$

quindi 2 soluzioni se $|a| < 1$

$P_5 \equiv (a, \sqrt{1-a^2}, 0)$, $P_6 \equiv (a, -\sqrt{1-a^2}, 0)$

che coincidono se $|a| = 1$ con P_1 o P_2.

In conclusione: se $|a| < 1$ ci sono 6 punti critici;

se $1 \leq |a| < \sqrt{2}$ ci sono 4 punti critici;

se $|a| = \sqrt{2}$ 3 punti critici;

se $|a| > \sqrt{2}$ 2 punti critici.

Per $a = 0$ ci sono quindi 6 punti critici:

$P_1 \equiv (1, 0, 0)$; $P_2 \equiv (-1, 0, 0)$; $P_3 \equiv \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$; $P_4 \equiv \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, +\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$P_5 \equiv (0, 1, 0)$; $P_6 \equiv (0, -1, 0)$.

Calcoliamo l'Hessiana (per $a=0$):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 2z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0 \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4z+2x$$

$$H = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2y & 2x & 0 \\ 2z & 0 & 2x+4z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x & y & z \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x+2z \end{bmatrix}$$

$H(P_1) = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ quindi P_1 è minimo

$H(P_2) = 2\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ quindi P_2 è massimo

$H(P_3) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}-2\sqrt{2}=-\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ha 2 autovalori positivi e 1 negativo quindi SELLA

$H(P_4) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ 2 autovalori negativi e 1 positivo, quindi SELLA

$$H(P_5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det = 0$$

$$H(P_6) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det = 0$$

$f_0(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}z^3 + x(y^2+z^2) - x$ = (sviluppando in $(0,1,0)$)

$= 2x(y-1) + \frac{1}{3}x^3 + x(y-1)^2 + xz^2 + \frac{2}{3}z^3 = 2x(y-1) + O(3)$

che assume valori di segno opposto vicino al punto $(0,1,0)$, che quindi è una sella.

Analogamente per il punto $(0,-1,0)$.

---

2) Estremi di $f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}z^3 + x(y^2+z^2) - x$

sul vincolo $x^2+y^2+z^2 = 1$.

$$-\frac{1}{3}x^3 + x^3 - x = \frac{2}{3}x^3 - x$$

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = x^2+y^2+z^2-1 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2xy + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2z(x+z) + 2\lambda z = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2+y^2+z^2-1 = 0 \end{cases}$$

La 4^a e la 1^a danno $\lambda = 0$ oppure $x = 0$.

$\lambda = 0$ dà i punti critici di f (trovati nel punto 1)) che si trovano sul vincolo: tutti e 6 i punti critici si trovano sul vincolo.

$x = 0$ dà $y = 0$ (nella 2^a) e $z^2 = 1$ (nella 4^a) mentre la 3^a dà: $2z(z+\lambda) = 0$ e quindi $\lambda = -z$.

Quindi i due punti: $P_7 = (0,0,+1)$, $P_8 = (0,0,-1)$.

Valutando f negli 8 punti trovati:

$f(P_1) = -\frac{2}{3}$; $f(P_2) = \frac{2}{3}$; $f(P_3) = \frac{2}{3}\frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{3\sqrt{2}}$

$f(P_4) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{2}}$; $f(P_5) = f(P_6) = 0$;

$f(P_7) = \frac{2}{3}$; $f(P_8) = -\frac{2}{3}$.

Quindi P_1 e P_8 sono minimi vincolati,
P_2 e P_7 " massimi " .

---

3) $\vec{F}(x,y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax+by,\ cx+dy)$

$\frac{\partial F_1}{\partial y} = b = \frac{\partial F_2}{\partial x} = c$; quindi la matrice devono essere simmetriche. La condizione è sufficiente perché il dominio è tutto $\mathbb{R}^2$.

Il potenziale φ deve soddisfare (integrando risp. a x)

$$\varphi(x,y) = \frac{ax^2}{2} + bxy + k(y) \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = bx + k'(y) = bx + dy \qquad (b=c)$$

da cui $k(y) = \frac{dy^2}{2} + \text{cost.}$

cioè:
$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}dy^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right).$$

(seconda parte - solo compitino).

$$\vec{F} = f(x,y)\, A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = f(x,y)(ax+by, bx+cy)$$

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = b\, f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(ax+by)$$

$$= \frac{\partial F_2}{\partial x} = b\, f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(bx+cy)$$

cioè:
$$\frac{\partial f}{\partial y}(ax+by) = \frac{\partial f}{\partial x}(bx+cy)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(ax+by) - \frac{\partial f}{\partial x}(bx+cy) = 0$$

cioè $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ è ortogonale al vettore $\vec{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

Ma $\vec{v}$ è ortogonale a ∇f, quindi la condizione è che ∇f sia proporzionale ad $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$:

$$\nabla f(x,y) = \lambda(x,y) A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda(x,y)(ax+by) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda(x,y)(bx+cy) \end{cases}$$

Ad esempio, se $\lambda = 1$ costante, f diventa il potenziale φ calcolato in precedenza:

$$\vec{F} = \varphi(x,y)\, A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \varphi(x,y) \cdot \nabla \varphi .$$

[esercizio: calcolare il potenziale ψ di questo $\vec{F}$:
soluzione: $\psi(x,y) = \frac{1}{2}\varphi^2(x,y)$]

---

4) $C = \left\{ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 1 \quad , \quad z \geq 1 \right\}$

Facendo il cambiamento di variabili: $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 3w \end{cases}$

il solido C diventa:

$$C' = \left\{ u^2 + v^2 + w^2 \leq 1 \quad , \quad w \geq \frac{1}{3} \right\}$$

Quindi: $\quad Vol(C) = \iiint_C 1 \, dV = 3 \iiint_{C'} du\, dv\, dw$

$$\iiint_{C'} du\, dv\, dw = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{1}{3}}^{1} dw \int_0^{\sqrt{1-w^2}} \rho \, d\rho$$

[coordinate cilindriche:
$u = \rho \cos\theta$
$v = \rho \sin\theta$
$w = w$

$$= 2\pi \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-w^2}\right)^2 dw = \pi \int_{\frac{1}{3}}^{1} (1-w^2)\, dw = \pi\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{81}\right) =$$

$$= \pi \, \frac{28}{81}$$

Quindi $\quad Vol(C) = \frac{28}{27}\pi$

5)

	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
θ	0	$\frac{2\pi}{3}$	0
$2\cos\theta \pm 1$	3	0	1
u_n	5	2	3
$\chi(\Gamma)$	15	0	3

$$a_1 = \frac{1}{6}\left(15 + 2\cdot 0\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot 1\right) = 4$$

$$a_2 = \frac{1}{6}\left(15 + 2\cdot 0\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot(-1)\right) = 1$$

$$a_3 = \frac{1}{6}\left(30 + 2\cdot 0\cdot(-1) + 3\cdot 3\cdot 0\right) = 5$$