

Esame Istituzioni Matematica II, 7/6/2012 (prof. M. Salvetti)

studenti del nuovo corso (6 crediti): eser. 1,2,3,4

studenti del vecchio corso (3 crediti): es: 1,2,3

1. Sia data la funzione di due variabili

$$f(x, y) = \frac{xy - 1}{xy + 1}.$$

- (a) Descrivere il campo di esistenza e le linee di livello di f .
- (b) Calcolare le derivate prime parziali di f e l'equazione del piano tangente nel punto $(1, 1)$.
- (c) Determinare gli eventuali punti critici della funzione.
- (d) Calcolare gli estremi vincolati (classificandoli) su

$$x - y = 0.$$

2. (a) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale

$$\vec{F}_\lambda(x, y, z) \equiv (-\lambda y, \lambda x, z)$$

è conservativo.

- (b) Dato il cammino

$$C := \{(\cos(\alpha), \sin(\alpha), \alpha) : 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}$$

calcolare (se esiste) λ in modo che il lavoro di F_λ su C sia nullo.

3. (a) Calcolare

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$$

dove D è il dominio definito da

$$D := \{x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

- (b) L'integrale converge sul dominio

$$D_\infty := \{x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2\} ?$$

(giustificare la risposta).

4. Sia data la molecola CH_4 di metano, a forma di tetraedro regolare con il C al centro, che ha gruppo di simmetria T_d avente 24 elementi $E, 8C_3, 3C_2, 6\sigma_d, 6S_4$ (il coefficiente davanti indica quanti elementi del dato tipo ci sono).

- (a) Descrivere geometricamente gli elementi del gruppo.
- (b) Determinare il carattere della rappresentazione totale (ridotta) Γ del gruppo di simmetria T_d completando la tabella (I) allegata;
- (c) Decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I)) e specificare le frequenze che appaiono in Ir e Ra .

Il gruppo T_d ha 5 rappresentazioni irriducibili (A_1, A_2, B, F_1, F_2) con tavola dei caratteri

Γ_i	E	$8C_3$	$3C_2$	$6\sigma_d$	$6S_4$	Ir	Ra
A_1	1	1	1	1	1	non attivo	attivo
A_2	1	1	1	-1	-1	non attivo	non attivo
B	2	-1	2	0	0	non attivo	attivo
F_1	3	0	-1	1	-1	non attivo	attivo
F_2	3	0	-1	-1	1	attivo	attivo

(*)

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale si determina considerando, per ogni elemento del gruppo che sia una rotazione propria di angolo θ , il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando $u_n * (2\cos(\theta) + 1)$; se l'elemento e' una rotazione impropria di angolo θ , si moltiplica $u_n * (2\cos(\theta) - 1)$.

θ	E	$8C_3$	$3C_2$	$6\sigma_d$	$6S_4$
θ		
$2\cos(\theta) \pm 1$		
$u_n - 2, u'_n$		
$\chi(R)$		

(I)

Numero frequenze normali IR : ...

Numero frequenze normali Ra : ...