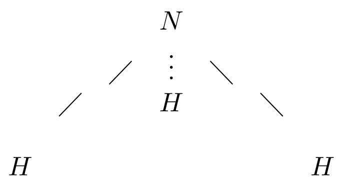
Esame Istituzioni Matematica II, 4/2/2010 (prof. M. Salvetti)

studenti del nuovo corso (6 crediti): eser. 1,2,3,4
studenti del vecchio corso (3 crediti): es: 2,3,4
studenti del vecchio ordinamento (prima dei crediti): es: 2,3,4,5

1. Data la molecola NH_3



   (a) Determinare il carattere della rappresentazione totale Γ del gruppo di simmetria C_{3v} della molecola completando la tabella (I) allegata.

   (b) Decomporre la rappresentazione totale Γ (di ordine 12) nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tavola determinata in (1a)).

2. Sia data la funzione di due variabili

$$f(x,y) \ = \ \frac{1-\rho}{\rho^\alpha}$$

   dove $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\alpha > 1$ é un numero fissato.

   (a) Descrivere il dominio di f e le sue linee di livello.

   (b) Calcolare (se esiste) il limite

$$lim_{(x,y)\to(0,0)} \ f(x,y)$$

   e

$$lim_{(x,y)\to\infty} \ f(x,y)$$

   (c) Scrivere le derivate prime parziali di f, calcolare il gradiente di f nel punto $P \equiv (5,3)$ e l'equazione del piano tangente al grafico di f in tale punto.

   (d) Dire se la funzione ha punti critici ed eventualmente classificarli.

   (e) Trovare gli estremi vincolati di $f(x,y)$ con la condizione

$$x^2 - y^2 = 1.$$

3. (a) Dire (giustificandolo) se il campo

$$F(x,y,z) \ \equiv \ (0, z, -y)$$

   é conservativo e, in caso affermativo, determinarne un potenziale.

(b) Calcolare la circuitazione del campo lungo la circonferenza

$$C_{xy} \;=\; \{(x,y,z):\; z=0, x^2+y^2=1\}$$

e lungo la circonferenza

$$C_{yz} \;=\; \{(x,y,z):\; x=0, y^2+z^2=1\}.$$

4. Data la funzione $f(x,y)$ dell'esercizio 2

   (a) calcolare

   $$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

   dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; 1 \leq \rho \;\leq 2\}$ $(\rho = \sqrt{x^2+y^2})$.

   (b) Dire per quali $\alpha > 1$ l'integrale improprio

   $$\int\int_{\{\rho\geq 1\}} f(x,y)\; dxdy$$

   é convergente.

5. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$$

Il gruppo $\mathcal{C}_{3v}$ ha 6 elementi $E,\ 2C_3,\ 3\sigma_v$ (il coefficiente davanti indica quanti elementi del dato tipo ci sono) e ha 3 rappresentazioni irriducibili ($A_1,\ A_2,\ B$) con tavola dei caratteri

Γ_i	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
B	2	-1	0

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale si determina considerando, per ogni elemento del gruppo che sia una rotazione propria di angolo θ, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e motiplicando $u_n * (2cos(\theta)+1)$; se l'elemento e' una rotazione impropria di angolo θ, si moltiplica $u_n * (2cos(\theta) - 1)$.

	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
θ	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$2cos(\theta) \pm 1$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
u_n	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\chi(R)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

(I)