Esame straordinario Istituzioni Matematica II, 3/12/2012 (prof. M. Salvetti)

studenti del nuovo corso (6 crediti): eser. 1,2,3,4
studenti del vecchio corso (3 crediti): es: 1,2,3

1. Sia data la funzione di due variabili

$$f(x,y) \; = cos(\pi x) \; + \; cos(\pi y)$$

   (a) Dire (giustificandolo) se esistono i limiti

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y), \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$$

   e in caso affermativo calcolarli.

   (b) Studiare i punti critici della funzione $f(x,y)$.

   (c) Determinare gli estremi vincolati di f sul vincolo

$$x - y = 0.$$

2. Sia $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ un fissato vettore non nullo. Sia $\vec{F}$ il campo di vettori che nel punto $\vec{r} \equiv (x,y,z)$ è dato da

$$\vec{F}(\vec{r}) \; = < \vec{r}, \vec{v} > \; \vec{r} \; ,$$

   dove $< \, , \, >$ è il prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^3$.

   (a) Dire (giustificandolo) se il campo $\vec{F}$ è conservativo.

   (b) Calcolare il lavoro di $\vec{F}$ sul segmento che parte dall'origine e termina nel secondo estremo di $\vec{v}$.

3. Sia C il cono in $\mathbb{R}^3$ con base il cerchio $\{x^2 + y^2 \leq a^2\}, \; a > 0$, posto nel piano (x,y) e vertice il punto $(0,0,h), \; h > 0$.

   (a) Descrivere C tramite un sistema di disuguaglianze.

   (b) Dati i piani orizzontali $\Pi_1 = \{z = h_1\}$ e $\Pi_2 = \{z = h_2\}$, con $0 \leq h_1 < h_2 \leq h$, calcolare il volume della regione di cono compresa tra i due piani Π_1 e Π_2.

   (c) (facoltativo) Calcolare l'area della superficie di cono compresa tra i due piani.

4. Sia data una molecola A, A, B, B con 4 atomi ai vertici di un rombo avente centro l'origine degli assi, e dove gli A sono su vertici opposti situati sull'asse x, e i B sono su vertici opposti situati sull'asse y.

   (a) Determinare il carattere della rappresentazione totale (ridotta) Γ del gruppo di simmetria D_{2h} completando la tabella (I) allegata;

   (b) Decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I)) e specificare (con la loro molteplicitá) le frequenze che appaiono in Ir e Ra.

==============================

Il gruppo D_{2h} ha 8 rappresentazioni irriducibili con tavola dei caratteri

D_{2h}		Γ_i	E	C_2^z	C_2^y	C_2^x	i	iC_2^z	iC_2^y	iC_2^x
x^2, y^2, z^2		A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1
		A_{1u}	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
xy		B_{1g}	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
	z	B_{1u}	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
xz		B_{2g}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
	y	B_{2u}	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
yz		B_{3g}	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	x	B_{2u}	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1

$(*)$

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale ridotta si determina considerando, per ogni elemento del gruppo che sia una rotazione propria di angolo θ, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e motiplicando $(u_n - 2) * (2cos(\theta) + 1)$; se l'elemento e' una rotazione impropria di angolo θ, si moltiplica $u_n * (2cos(\theta) - 1)$.

D_{2h}	E	C_2^z	C_2^y	C_2^x	i	iC_2^z	iC_2^y	iC_2^x
θ	...	...	...	...	...	...	...	...
$2cos(\theta) \pm 1$	...	...	...	...	...	...	...	...
$u_n - 2, u'_n$	...	...	...	...	...	...	...	...
$\chi(R)$	...	...	...	...	...	...	...	...

(I)

Numero frequenze normali IR: ....

Numero frequenze normali Ra: ....