Esame Istituzioni Matematica II, 31/1/2012 (prof. M. Salvetti)

studenti del nuovo corso (6 crediti): eser. 1,2,3,4
studenti del vecchio corso (3 crediti): es: 1,2,3

1. Sia data la funzione di due variabili

$$f(x,y) \ = \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

   (a) Descrivere il campo di esistenza e le linee di livello di f..

   (b) Calcolare i limiti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \ \lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y).$$

   (c) Calcolare le derivate prime parziali di f e l'equazione del piano tangente nel punto $(2,1)$.

   (d) Determinare gli eventuali punti critici della funzione.

   (e) Dire se ci sono estremi vincolati su

$$x + y = 3$$

   e in caso positivo determinarli.

2. (a) Dimostrare che per ogni a reale il campo

$$F \equiv (x + ay, y + ax + az, z + ay)$$

   é conservativo.

   (b) Dimostrare che se $a^2 < 1/2$, allora per ogni punto P diverso dall'origine O il lavoro su un qualunque cammino da O a P é positivo. Se invece $a^2 > 1/2$ esistono punti P per cui tale lavoro é negativo.

3. Sia C un cono avente come base un cerchio di raggio r di centro l'origine e contenuto nel piano x, y, e vertice nel punto $(0,0,h)$ $(r, h > 0)$.

   (a) Determinare $\alpha > 0$ in modo che il piano $z = \alpha$ divida il cono in due parti di egual volume.

   (b) Determinare β in modo che il piano $z = \beta$ divda la superficie laterale del cono in due parti di uguale area.

4. Sia data una molecola A, B, A, B, C a forma di piramide retta, con base quadrata ABAB, a vertici opposti uguali, e vertice C.

   (a) Determinare il carattere della rappresentazione totale (ridotta) Γ del gruppo di simmetria C_{2v} completando la tabella (I) allegata;

   (b) Decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I)) e specificare le frequenze che appaiono in Ir e Ra.

   (c) Dire brevemente cosa si intende per coordinate normali e qual é il loro comportamento rispetto al gruppo di simmetria della molecola.

Il gruppo $\mathcal{C}_{2v}$ ha 4 elementi $E,\ C_2,\ \sigma_v,\ \sigma'_v$ e ha 4 rappresentazioni irriducibili $(A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2)$ con tavola dei caratteri

Γ_i	E	C_2	σ_v	σ'_v	IR	Ra
A_1	1	1	1	1	z	x^2, y^2, z^2
A_2	1	1	-1	-1		xy
B_1	1	-1	1	-1	x	xz
B_2	1	-1	-1	1	y	yz

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale ridotta si determina considerando, per ogni elemento del gruppo che sia una rotazione propria di angolo θ, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando $(u_n - 2) * (2cos(\theta) + 1)$; se l'elemento e' una rotazione impropria di angolo θ, si considera il numero u'_n di atomi fissi e si moltiplica $u'_n * (2cos(\theta) - 1)$.

	E	C_2	σ_v	σ'_v
θ	...	...	...	...
$2cos(\theta) \pm 1$	...	...	...	...
$u_n - 2, u'_n$	...	...	...	...
$\chi(R)$	...	...	...	...

(I)

Numero frequenze normali IR: ...
Numero frequenze normali Ra: ...