Esame Istituzioni Matematica II, 2/2/2009 (prof. M. Salvetti)

Risolvere l'esercizio 1 e uno a scelta tra gli esercizi 2 e 3.

1. Sia data la funzione di due variabili
$$f(x,y) \;=\; e^{-\frac{y^2}{x^2}}.$$
   (a) (facoltativo) Descrivere il gruppo delle isometrie del piano (x,y) che lasciano invariata la funzione f (dire in particolare che ordine ha tale gruppo, se e' commutativo e scriverne la tabella di moltiplicazione).
   (b) Descrivere il dominio di f e le sue linee di livello.
   (c) i. Calcolare
$$lim_{(x,y)\to(0,y_0)}\; f(x,y), \text{ per ogni fissato numero } y_0 \neq 0.$$
   ii. Esiste il
$$lim_{(x,y)\to(0,0)}\; f(x,y)\ ?$$
   (giustificare la risposta. Sugg.: pensare alle linee di livello)
   (d) Scrivere le derivate prime parziali di f, calcolare il gradiente di ∇f di f nel punto $P \equiv (1,1)$ e l'equazione del piano tangente al grafico di f in tale punto.
   (e) Dire se esistono punti di massimo e minimo della funzione e calcolarli.
   (f) Massimizzare $f(x,y)$ con la condizione
$$g(x,y) = x^2 + y^2 - k = 0,\ k > 0,\ k \in \mathbb{R}, \text{ numero fissato.}$$
   (g) Calcolare il lavoro del campo ∇f lungo
   i. il segmento di retta C che parte dal punto $P \equiv (1,1)$ e arriva al punto $Q \equiv (a,1),\ a > 1$;
   ii. il segmento di retta D che parte dal punto $P \equiv (1,1)$ e arriva al punto $R \equiv (1,a),\ a > 1$.
   Calcolare anche il lavoro in entrambi i casi quando $a \to +\infty$.
   iii. Quanto é il lavoro di ∇f se si va da P a Q percorrendo prima il segmento D da P a R e poi il segmento RQ ?

2. (a) Determinare il volume del tetraedro di vertici
$$P_0 \equiv (1,0,0),\ P_1 \equiv (2,0,0),\ P_2 \equiv (2,0,2),\ P_3 \equiv (0,3,0)$$
   (b) Determinare θ nell'intervallo $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ tale che il volume del tetraedro di vertici
$$P_\theta \equiv (cos(\theta), sen(\theta), 0),\ P_1,\ P_2,\ P_3$$
   abbia volume minimo.

3. (a) Determinare l'area della regione
$$R := \ \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le r^2,\ x^2 - y^2 \ge 1\}$$
   compresa tra la circonferenza di raggio $r > 0$ e la parte "esterna" dell'iperbole equilatera.
   (b) Determinare il volume del dominio D ottenuto per rotazione di R attorno all'asse y.