Esame Istituzioni Matematica II, 28/1/2013 (prof. M. Salvetti)

studenti del nuovo corso (6 crediti): eser. 1,2,3,4
studenti del vecchio corso (3 crediti): es: 1,2,3

1. Sia data la funzione di due variabili

$$f_a(x,y) \ = (x^2 + ay)e^{-x^2-y^2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

   (a) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f_a(x,y)$$

   (b) Studiare i punti critici di $f_a(x,y)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

   (c) Determinare i massimi e i minimi vincolati di $f_a(x,y)$ con il vincolo

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

2. Sia $\vec{F}_a$ il campo

$$\vec{F}_a(x,y,z) \ = \ (zx, zy, a(x^2+y^2)), \quad a \in \mathbb{R}$$

   (a) Dire per quali valori di a il campo é conservativo (giustificando la risposta).

   (b) Per $a = -1$, calcolare il lavoro di $\vec{F}$:

      i. sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1, \ z = 0$;

      ii. sulla semicirconferenza che parte dal punto $(0,0,1)$ e arriva in $(0,0,-1)$, contenuta nel piano $y = 0$ e nel semispazio $x \geq 0$.

3. (a) Sia

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

   la sfera unitaria e sia $P_a \equiv (0,0,a)$, $a > 1$ Sia poi C_a il cono retto di vertice P_a, avente come asse l'asse z e che sia tangente alla sfera S. Calcolare a in modo che il volume della parte del cono C_a che contiene il punto P_a ed è esterna alla sfera sia uguale a 1.

   (b) Calcolare la superficie laterale della parte di cono del punto precedente, utilizzando un integrale d'area.

4. Sia data una molecola A, B, A, B, A, B, C, D dove i 6 atomi A, B formano un esagono regolare (alternandosi lungo il bordo dell'esagono) nel piano x, y, di centro l'origine $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$, mentre $C \equiv (0,0,1)$, $D \equiv (0,0,-1)$.

   (a) Determinare il carattere della rappresentazione totale (ridotta) Γ del gruppo di simmetria C_{3v} completando la tabella (I) allegata;

   (b) Decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I)) e specificare le frequenze che appaiono in Ir e Ra.

(c) Dimostrare che se il gruppo di simmetria di una molecola contiene delle riflessioni (rispetto a un piano) allora ha sempre almeno 2 rappresentazioni irriducibili (distinte) monodimensionali.

================================

Il gruppo $\mathcal{C}_{3v}$ ha 6 elementi $E,\ 2C_3,\ 3\sigma_v$ e ha 3 rappresentazioni irriducibili $(A_1,\ A_2,\ B)$ con tavola dei caratteri

Γ_i	E	$2C_3$	$3\sigma_v$	IR	Ra
A_1	1	1	1	attivo	attivo
A_2	1	1	-1	non attivo	non attivo
B	2	-1	0	attivo	attivo

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale ridotta si determina considerando, per ogni elemento del gruppo che sia una rotazione propria di angolo θ, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando $(u_n - 2) * (2cos(\theta) + 1)$; se l'elemento e' una rotazione impropria di angolo θ, si considera il numero u'_n di atomi fissi e si moltiplica $u'_n * (2cos(\theta) - 1)$.

	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
θ	...	...	...
$2cos(\theta) \pm 1$	...	...	...
$u_n - 2, u'_n$	...	...	...
$\chi(R)$	...	...	...

(I)

Numero frequenze normali IR: ...
Numero frequenze normali Ra: ...